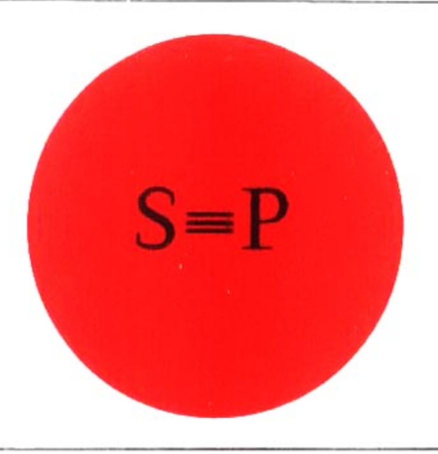
Lecciones populares de matemáticas

ACERCA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

A. I. Fetísov



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ В ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. I. FETÍSOV

ACERCA DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

TRADUCIDO DEL RUSO POR EL INGENIERO
ANTONIO MOLINA GARCÍA

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

§ 1. ¿Qué es una demostración? 7

§ 2. ¿Para qué hace falta la demostración? 11

§ 3. ¿Cómo debe ser la demostración? 18

§ 4. ¿Qué proposiciones de la geometria pueden admitirse sin demostración? 45

IMPRESO EN LA URSS. 1980

На испанском языке

INTRODUCCIÓN

En una ocasión, a principios de curso, oí casualmente una conversación de dos niñas. La mayor de ellas había pasado al sexto grado y la menor, al quinto. Las niñas hablaban de sus impresiones sobre las lecciones, los maestros, las amigas y las asignaturas nuevas. A la alumna de sexto grado le sorprendían mucho las lecciones de geometría: "Figúrate — decía —, llega la maestra y dibuja en la pizarra dos triángulos iguales y después, durante toda la clase, se dedica a demostrarnos que, efectivamente, son iguales. Yo no comprendo. ¿Para qué hace falta esto?" — "¿Y cómo vas a responder si te preguntan esa lección?" — le preguntó la más pequeña. "La estudiaré por el libro... pero es tan difícil recordar donde hay que poner cada letra..."

Ese mismo día por la tarde oí cómo esta muchacha, sentada junto a la ventana, estudiaba la geometría: "Para demostrarlo superponemos el triángulo $A'B'C'$ al triángulo ABC... superponemos el triángulo $A'B'C'$ al triángulo ABC..." repetía varias veces. Siento no haber sabido qué calificaciones obtendría esta niña en geometría, pero pienso que esta asignatura debía serle bastante difícil.

Varios días después vino a verme mi vecino Tolia, que también estudia en el sexto grado, para quejarse de la geometría. En clase les habían explicado, y después les señalaron como tarea para casa, estudiar el teorema acerca de que en el triángulo, todo ángulo externo es mayor que cualquier interno que no sea adyacente suyo. Tolia me enseñó el dibujo del libro de geometría de Kiseliov (fig. 1) y me preguntó: "¿Para qué hay que hacer una demostración tan larga y difícil, cuando en este dibujo se ve claramente que el ángulo exterior del triángulo es obtuso y que los ángulos internos no adyacentes a él son agudos? Sabiendo que el ángulo obtuso es siempre mayor que el agudo — me aseguraba Tolia —, esto está tan claro que no necesita demostración." Y tuve que explicarle que esta proposición no es totalmente evidente y que es muy razonable exigir la demostración del teorema acerca del ángulo externo del triángulo.

Por fin, recientemente un alumno de octavo grado me enseñó su trabajo de control, por el que "injustamente," según él, le habían rebajado la nota. En el problema propuesto se daba un trapecio isósceles, cuyas bases tenían respectivamente 9 y 25 cm, los lados no paralelos, 17 cm, y se pedía hallar la altura del trapecio. Para resolver este problema, en el trapecio había inscrito una circunferencia e indicaba que, basándose en el teorema sobre el cuadrilátero circunscrito (según el cual las sumas de los lados opuestos del cuadrilátero circunscrito son

iguales), en dicho trapecio podía inscribirse una circunferencia (puesto que $9 + 25 = 17 + 17$). Después la altura la determinaba como el diámetro de la circunferencia inscrita en el trapecio isósceles, el cual era igual a la media proporcional entre las bases del mismo (este teorema había sido demostrado por los alumnos en uno de los problemas resueltos antes).

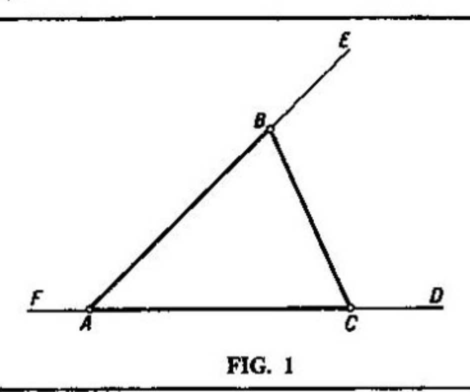


FIG. 1

La resolución parecía muy sencilla y convincente, pero el profesor subrayó que la referencia al teorema sobre el cuadrilátero circunscrito no era correcta. El alumno de octavo grado no podía comprender esto. "¿No es verdad, acaso, que en el cuadrilátero circunscrito las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí? Pues en nuestro trapecio la suma de las bases es igual a la suma de los lados no paralelos, por lo tanto, en este trapecio puede inscribirse una circunferencia. ¿Dónde está entonces el error?"—me preguntaba.

Hechos como estos que acabo de mencionar pueden citarse muchos. Los escolares no suelen comprender para qué hace falta demostrar una verdad que sin demostración pareece suficientemente clara, además de que las demostraciones parecen a veces demasiado complicadas y voluminosas. Y se dan casos en que una demostración aparentemente clara y convincente resulta ser incorrecta si se examina detenidamente.

El objeto de este librito es ayudar a los alumnos a comprender las cuestiones siguientes:

1) ¿Qué es una demostración?
2) ¿Para qué hace falta la demostración?
3) ¿Cómo debe ser la demostración?
4) ¿Qué puede admitirse en geometría sin demostración?

§ 1. ¿QUÉ ES UNA DEMOSTRACIÓN?

1. Así, pues, nos preguntamos, ¿qué es una demostración? Figúrese que quiere convencer a su interlocutor de que la Tierra tiene la forma de una esfera. Le hablará de cómo el horizonte se ensancha a medida que el observador se eleva sobre la superficie de la tierra, de los viajes alrededor del mundo, de que la sombra que proyecta la Tierra sobre la Luna durante los eclipses de esta última es redonda, etc.

Cada uno de estos testimonios con ayuda de los cuales puede convencer a su interlocutor, se llama *argumento* de la demostración, y el conjunto de todos los argumentos, *argumentación*. ¿En que se funda la fuerza o persuación de un argumento? Consideremos, por ejemplo, el último de los argumentos antes citados. En él se afirma que la Tierra debe ser redonda, puesto que su sombra es redonda. Esta afirmación se funda en que todo el mundo sabe por experiencia propia que todo cuerpo esférico da una sombra redonda, y viceversa, la forma redonda de la sombra, para posiciones diversas de los cuerpos, se obtiene de cuerpos cuya forma es esférica. Por consiguiente, en este caso nos apoyamos ante todo en LOS HECHOS, en nuestra experiencia directa de la vida, que evidencia las propiedades de los cuerpos del mundo que nos rodea. Después recurrimos a LA DEDUCCIÓN, que en el caso dado se hace, aproximadamente, en el siguiente orden.

"Todos los cuerpos que en diversas posiciones proyectan una sombra redonda, tienen forma de esfera". "La Tierra, durante los eclipses de Luna, aunque ocupa posiciones distintas con respecto a ésta, siempre proyecta sobre ella una sombra redonda". Deducción: "Por consiguiente, la Tierra tiene forma de esfera".

Veamos un ejemplo de física. En los años sesenta del siglo pasado, el físico inglés Maxwell estableció que las oscilaciones electromagnéticas se propagan en el espacio con la misma velocidad con que se propaga la luz. Esta circunstancia le indujo a hacer la proposición (hipótesis) de que la luz también tiene carácter de oscilaciones magnéticas. Para demostrar que esta proposición era justa había que establecer que la semejanza de las ondas luminosas y electromagnéticas no se limitaba únicamente a la igualdad de sus velocidades de propagación, había que aportar argumentos suficientemente sólidos que demostraran que la naturaleza de ambos fenómenos es la misma. Estos argumentos fueron los resultados de los experimentos en los cuales se puso de manifiesto la indudable influencia de los campos magnético y eléctrico en el carácter de la radiación de la luz por focos diversos. Se descubrió también una serie de otros hechos que demos-

traron con toda evidencia que las oscilaciones luminosas y las electromagnéticas tienen una misma naturaleza.

Pondremos otro ejemplo de aritmética. Tomemos varios números impares cualesquiera, elevemos cada uno de ellos al cuadrado y a cada uno de los cuadrados obtenidos restémosle una unidad. Por ejemplo:

$$7^2 - 1 = 48; \quad 11^2 - 1 = 120; \quad 5^2 - 1 = 24;$$
$$9^2 - 1 = 80; \quad 15^2 - 1 = 224$$

y así sucesivamente. Examinando los números obtenidos vemos que tienen una propiedad común: cada uno de ellos es divisible por 8. Haciendo varias pruebas más con otros números impares y llegando al mismo resultado, expresamos la siguiente hipótesis: "El cuadrado de cualquier número impar, disminuido en una unidad, da un número múltiplo de 8".

Como ahora nos referimos a CUALQUIER número impar, para hacer la demostración tenemos que aportar argumentos válidos para CUALQUIER número impar. Teniendo esto en cuenta, recordamos que todo número impar tiene la forma $2n - 1$, donde n es un número natural cualquiera. El cuadrado de un número impar, disminuido en una unidad, puede escribirse en forma de la expresión $(2n - 1)^2 - 1$. Abriendo el paréntesis obtenemos: $(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$.

La expresión obtenida es múltiplo de 8 cualquiera que sea el número natural n. En efecto, el factor cuatro indica que el número $4n(n - 1)$ es múltiplo de cuatro. Además, $n - 1$ y n son dos números naturales sucesivos, de los cuales uno tiene que ser necesariamente par; por lo tanto, nuestra expresión también contiene necesariamente un factor 2.

Así pues, el número $4n(n-1)$ es siempre múltiplo de 8, que es lo que había que demostrar.

En estos ejemplos pueden verse claramente los caminos principales que se siguen para conocer el mundo que nos rodea, así como sus objetos, fenómenos y leyes. El primero de estos caminos consiste en que basándonos en un gran número de observaciones y experiencias llevadas a cabo con los objetos y fenómenos descubrimos en ellos leyes comunes. En los ejemplos antes citados pudimos ver que basándose en observaciones se estableció la dependencia entre la forma del cuerpo y su sombra; numerosas observaciones y experimentos confirmaron que la naturaleza de la luz es electromagnética; finalmente, las

pruebas que hicimos con los cuadrados de los números impares nos ayudaron a establecer la propiedad de dichos cuadrados, disminuidos en una unidad. Esta vía de obtención de conclusiones generales por observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción* (de la palabra latina *inductio*, razonamiento que parte de los conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad más general o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica).

Seguimos otro camino cuando, conociendo ya algunas leyes generales, aplicamos estos conocimientos a casos particulares. Este camino recibe el nombre de *deducción* (de la palabra latina *deductio*). Así, en el último ejemplo aplicamos las leyes generales de la aritmética a un caso particular, a la demostración de que existe cierta propiedad de todo número impar.

Este ejemplo nos muestra que la inducción y la deducción no pueden separarse la una de la otra. La unidad de la inducción y la deducción es un rasgo característico del pensamiento científico.

No es difícil advertir que en el proceso de cualquier demostración empleamos estos dos caminos. Cuando buscamos argumentos para demostrar una proposición cualquiera recurrimos a la experiencia, a las observaciones, a los hechos o a otras proposiciones ya demostradas. Sobre la base de los datos obtenidos deducimos la veracidad o falsedad de la proposición que se demuestra.

2. Pero volvamos a la geometría. La geometría estudia las propiedades espaciales del mundo material. Llamamos "espaciales" aquellas propiedades por las cuales se determinan la forma, la magnitud y la posición mutua de los objetos. Está claro que la necesidad de conocer estas propiedades se debe a exigencias prácticas: para construir máquinas, hacer edificios, trazar carreteras, canales, etc. hay que medir longitudes, áreas y volúmenes. Como es natural, los primeros conocimientos geométricos fueron adquiridos por vía inductiva, de un gran número de observaciones y experimentos. Pero a medida que se fueron acumulando verdades geométricas se descubrió que muchas de ellas pueden obtenerse de otras verdades por medio de razonamientos, es decir, por deducción, sin recurrir a una experiencia especial.

Así, por ejemplo, numerosas observaciones y experimentos nos convencen de que "por dos puntos puede trazarse una, y solamente una, línea recta.". Basándonos en esta verdad podemos afirmar, sin necesidad de ninguna experiencia, que "dos rectas diferentes no pueden tener nada más que un punto común" Esta nueva verdad se obtiene mediante un razonamiento muy sencillo. En efecto, si admitimos que dos rectas distintas pueden tener dos puntos comunes, de esto se deducirá

que por dos puntos pueden pasar dos rectas diferentes, lo cual contradice la verdad antes establecida.

La actividad práctica del hombre condujo al descubrimiento de un número muy grande de verdades geométricas que reflejan nuestros conocimientos acerca de las formas espaciales del mundo material. El estudio atento de estas verdades ha demostrado que unas de ellas pueden obtenerse, por medio de deducciones lógicas, de otras. Esto sugirió la idea de destacar entre todas las verdades geométricas una parte de las más simples y generales, que pueden admitirse sin demostración, y las demás propiedades y dependencias geométricas deducirlas de dichas verdades fundamentales.

Esta idea la concibieron ya los geómetras de la Grecia antigua, los cuales empezaron a sistematizar las verdades geométricas que ellos conocían, deduciéndolas de un número relativamente pequeño de proposiciones fundamentales. 300 años antes de nuestra era, el geómetra griego Euclides de Alejandría dio la exposición del sistema geométrico más perfecta de su tiempo. En esta exposición se destacaban las proposiciones que se admitían sin demostración, es decir, los llamados *axiomas* (la palabra griega αξιοζ significa lo que parece o se estima como justo). Las demás proposiciones, cuya veracidad se pone de manifiesto por medio de demostraciones, comenzaron a llamarse *teoremas* (del griego ϑεορεο, examinar o reflexionar).

El sistema de la geometría de Euclides se conservó durante muchos siglos y aún en nuestros días la exposición de muchas partes de la geometría en la escuela moderna refleja la influencia de Euclides. De este modo, en el sistema de la geometría tenemos un número relativamente pequeño de verdades fundamentales o axiomas, obtenidos por inducción y aceptados sin demostración, mientras que las demás verdades de la geometría se infieren de los axiomas por medio de la deducción. Por esto la geometría es fundamentalmente una ciencia deductiva.

En la actualidad el trabajo de muchos geómetras se orienta a poner de manifiesto todos los aximas necesarios para construir el sistema de geometría y a reducir su número todo lo posible. El trabajo en este sentido se inició el siglo pasado y aunque es mucho lo que ya se ha hecho, aún no puede considerarse que esté acabado por completo.

Resumiendo lo dicho en este párrafo podemos responder ya a la pregunta: ¿qué es una demostración en geometría? Como hemos visto, una demostración es un sistema de razonamientos por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y de verdades antes demostradas.

Nos queda por responder otra pregunta: ¿qué garantiza la verdad

de las proposiciones obtenidas por deducción? La veracidad de la deducción está determinada por que en ella aplicamos ciertas leyes generales a casos particulares, siendo evidente que todo lo que es justo en general y siempre, también debe serlo para cada caso aislado.

Si yo digo, por ejemplo, que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180° y que la figura ABC es un triángulo, no cabe la menor duda de que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Estudiando atentamente la geometría no es difícil convencerse de que es así precisamente como razonamos en cada deducción.

§ 2. ¿PARA QUÉ HACE FALTA LA DEMOSTRACIÓN?

1. Ahora procuraremos responder a la segunda pregunta: ¿para qué hace falta la demostración?

La necesidad de la demostración es consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (ciencia que estudia las leyes del razonamiento correcto), *el principio de la razón suficiente.* Este principio exige que toda afirmación que hagamos tenga fundamento, es decir, que vaya acompañada de argumentos suficientemente sólidos que confirmen su veracidad, su concordancia con los hechos y con la realidad. Estos argumentos pueden ser tanto indicaciones acerca de la posibilidad de comprobación mediante observaciones y experiencias, como también un razonamiento correctamente estructurado que contenga un sistema de deducciones.

En matemáticas nos encontramos principalmente con argumentos del último tipo.

La demostración de una proposición geométrica tiene por objeto el establecimiento de su certeza por medio de la deducción lógica de verdades ya demostradas o conocidas.

A pesar de todo se nos plantea la pregunta: ¿vale la pena hacer una demostración cuando la proposición que se quiere demostrar es por sí suficientemente clara y evidente?

Este era aproximadamente el punto de vista que mantenían los matemáticos hindúes en la edad media. Muchas de las proposiciones geométricas no las demostraban, sino que las acompañaban de un dibujo suficientemente expresivo y escribían sobre él una sola palabra "¡mira!". Así, por ejemplo, en el libro "Lilavati" del matemático indio Bhaskara Acharia, el teorema de Pitágoras se representa así (fig. 2). De estos dos dibujos el lector debe "percibir" que la suma de las áreas

de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

¿Puede decirse que en este caso no hay demostración? ¡Claro que no! Si el lector mira simplemente el dibujo, sin razonar, es poco probable que pueda llegar a una conclusión determinada. En realidad el autor supone que el lector no sólo mira, sino que también piensa. El lector debe comprender que ante sí tiene dibujados dos cuadrados

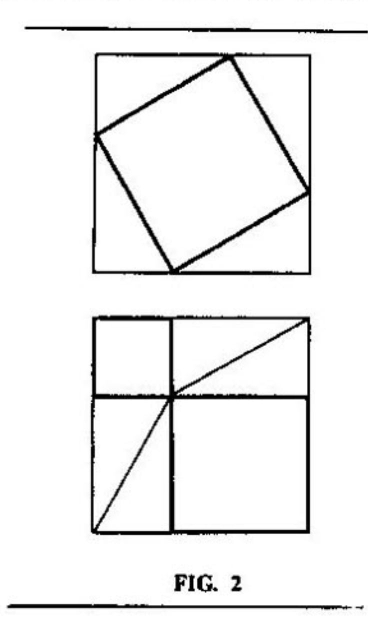


FIG. 2

iguales que tienen también áreas iguales. El primero de estos cuadrados está formado por cuatro triángulos rectángulos iguales y el cuadrado construido sobre la hipotenusa, y el segundo cuadrado consta de cuatro triángulos rectángulos, iguales a los anteriores, y de los dos cuadrados construidos sobre los catetos. Sólo queda imaginarse que si de dos magnitudes iguales (las áreas de los cuadrados grandes iguales) se quita una misma magnitud (el área de los cuatro triángulos rectángulos), nos quedarán dos superficies iguales: en el primer caso, el cuadrado construido sobre la hipotenusa, y en el segundo, los dos cuadrados construidos sobre los catetos. Como puede verse, aquí es totalmente insuficiente el apoyarse sólo en la evidencia, hay que pensar y razonar.

Pero, ¿puede ser que existan tales teoremas de geometría, tan evidentes en realidad, que sea innecesaria toda clase de razonamientos?

Aquí hay que indicar ante todo, que en una ciencia exacta es imposible apoyarse sistemáticamente en la evidencia, porque el concepto de "evidente" es muy difuso e inestable: lo que a uno le parece completamente evidente, a otro puede parecerle muy dudoso. Basta recordar cómo cualquier suceso es contado de distinto modo por los testigos presenciales del mismo y cómo a veces es difícil restablecer la verdad a base de las llamadas "declaraciones de los testigos".

Puede ponerse un interesante ejemplo geométrico de cómo puede engañarnos una aparente evidencia. Este ejemplo consiste en lo siguiente: cojo una hoja de papel y trazo en ella una línea continua cerrada; después tomo unas tijeras y hago un corte siguiendo esta línea. ¿Qué ocurrirá con la hoja de papel cuando los extremos del corte se cierren? La mayoría de los preguntados responderá seguramente y sin pensar, que la hoja se dividirá en dos trozos independientes. Sin embargo esta respuesta puede ser errónea. Para demostrarlo hagamos la

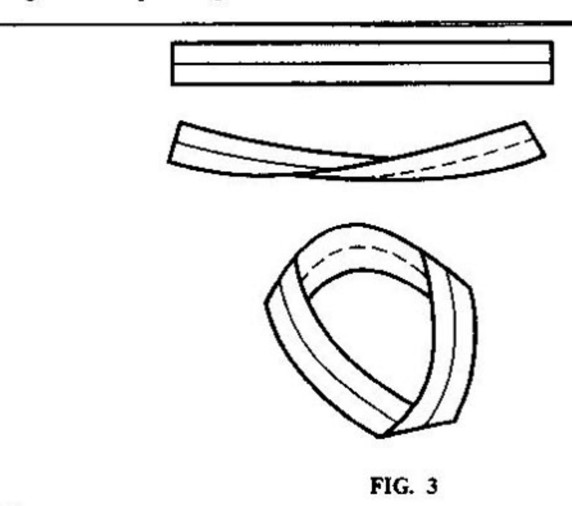


FIG. 3

siguiente experiencia: cojamos una cinta de papel y hagamos con ella un anillo, pegando sus extremos después de darle la vuelta a uno de ellos. Como resultado obtendremos la llamada "*banda de Möbius*" (fig. 3). (Möbius, matemático alemán que estudió las superficies de este tipo). Si cortamos ahora esta banda siguiendo una línea cerrada a lo largo de la cinta y haciendo el corte a distancias aproximadamente

iguales de los bordes del papel, la banda NO SE DIVIDIRÁ en dos partes separadas, sino que seguiremos teniendo en la mano UNA SOLA cinta. Hechos como el que acabamos de describir obligan a pensar en qué medida puede confiarse en los razonamientos basados en la "evidencia".

2. Examinemos más atentamente esta cuestión. Sirva de primer ejemplo el caso antes referido de la alumna de sexto grado. A la muchacha le pareció extraño que la profesora dibujara dos triángulos iguales y después demostrara el hecho, aparentemente evidente, de que eran iguales. En realidad, el problema se planteaba de un modo totalmente distinto: LA PROFESORA NO DIBUJABA DOS TRIANGULOS IGUALES,

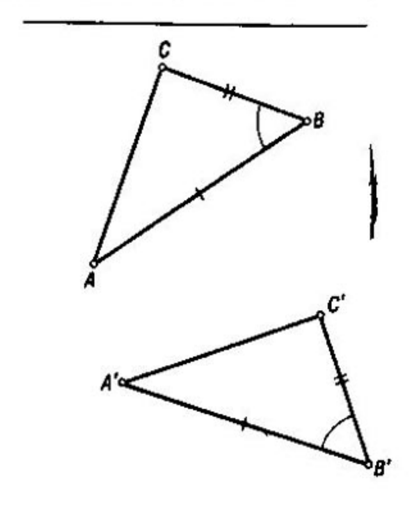


FIG. 4

sino que después de dibujar un triángulo ABC (fig. 4), dijo que otro triángulo $A'B'C'$ estaba construido de manera que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ y $\angle B = \angle B'$, y que se desconocía si serían iguales $\angle A'$ y $\angle A$, $\angle C'$ y $\angle C$ y los lados $A'C'$ y AC (ya que los ángulos A' y C' no los construyó según los ángulos A y C y el lado $A'C'$ no lo había tomado igual al lado AC).

Por lo tanto, en este caso, partiendo de las condiciones $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ y $\angle B' = \angle B$, debemos DEDUCIR la igualdad de los triángulos, es decir, la igualdad de todos sus elementos restantes, lo que indu-

dablemente exige ciertos razonamientos, o sea, demostraciones. También es fácil de demostrar que la igualdad de los triángulos obtenida basándose en la igualdad de tres pares de sus elementos correspondientes, dista mucho de ser tan "evidente" como parece a primera vista. Variemos un poco la condición del primer teorema sobre la igualdad de los triángulos: supongamos que dos lados de un triángulo son iguales respectivamente a dos lados de otro y que también son iguales los ángulos, pero no los comprendidos entre estos lados, sino los que se encuentran frente a uno de los lados iguales, por ejemplo, BC y $B'C'$. Escribamos esta condición: en $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ y $\angle A' = \angle A$. ¿Qué podemos decir de estos triángulos?

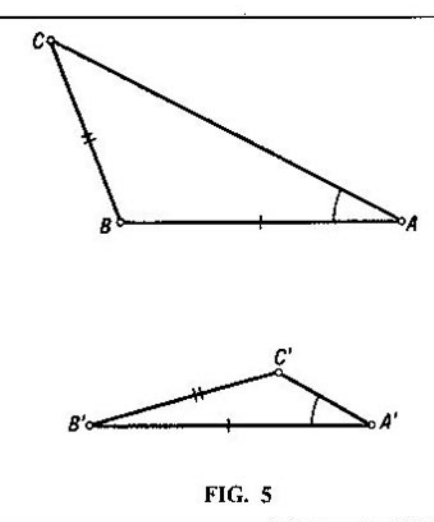


FIG. 5

Por analogía con el primer caso de igualdad de triángulos podríamos esperar que también ahora fueran iguales los triángulos, pero la fig. 5 nos convence sin lugar a dudas de que los triángulos aquí dibujados ABC y $A'B'C'$, aunque cumplen las condiciones $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ y $\angle A' = \angle A$, no son iguales.

Ejemplos de este tipo nos obligan a tener mucho cuidado en nuestros razonamientos y demuestran con suficiente claridad que sólo una demostración correctamente estructurada puede garantizar la veracidad de las proposiciones que se establecen.

3. Veamos ahora el segundo teorema, sobre el ángulo externo del triángulo, que dejó perplejo a mi vecino Tolia. En efecto, en el dibujo

que se da en el libro de texto oficial, el ángulo externo es obtuso y los ángulos internos no adyacentes a él son agudos, lo que puede apreciarse con facilidad sin necesidad de hacer mediciones, es decir, a ojo. ¿Quiere esto decir que este teorema no necesita demostración? No, indudablemente. Porque el teorema se refiere no sólo al triángulo dibujado en el libro, en el papel o en la pizarra, sino a CUALQUIER triángulo, cuya forma puede ser muy distinta de la que se da en el libro.

Figurémonos, por ejemplo, que el punto *A* se aleja, siguiendo la línea recta, del punto *C*. Obtenemos entonces un triángulo *ABC*

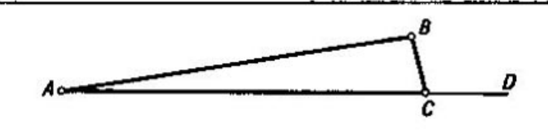


FIG. 6

(fig. 6) en el cual el ángulo en el punto *B* será también obtuso. Si el punto *A* se aleja del *C* aproximadamente 10 metros, en un triángulo tan agudo el transportador escolar ya no puede descubrir la diferencia entre el ángulo interno *B* y el externo. Y si el punto *A* se aleja del punto *C* hasta una distancia igual a la que separa la Tierra del Sol, podríamos decir con toda seguridad que ninguno de los instrumentos más exactos y modernos para medir ángulos sería capaz de descubrir la diferencia entre estos ángulos. De esto se deduce que con respecto a este teorema tampoco se puede decir que sea "evidente". Pero la demostración rigurosa que se da a este teorema NO DEPENDE de la forma casual del triángulo representado en el dibujo y muestra que el teorema sobre el ángulo externo es válido para CUALESQUIERA triángulos y no depende en modo alguno de la longitud relativa de sus lados. Por esto, incluso en aquellos casos en que la diferencia entre el ángulo interno y el externo es tan pequeña que no la perciben nuestros instrumentos de medida, seguimos estando seguros de que la diferencia EXISTE, porque demostramos que siempre, y en todos los casos, el ángulo externo del triángulo es mayor que cada uno de los internos no adyacentes a él.

En relación con este ejemplo hay que prestar atención al papel que desempeña el dibujo en la demostración de un teorema geométrico. Debe recordarse bien que el dibujo es solamente UN MEDIO AUXILIAR para la demostración del teorema, que es únicamente UN EJEMPLO, UN CASO PARTICULAR de toda una clase de figuras geométricas, con respecto a la

cual se demuestra dicho teorema. Por esto tiene mucha importancia saber separar en el dibujo dado las propiedades generales y constantes de la figura de las particulares y casuales. Por ejemplo, en el dibujo para demostrar el teorema sobre el ángulo externo del triángulo que se da en el libro de texto oficial, es casual el hecho de que el ángulo externo sea obtuso y el interno, agudo. Es evidente que en estos hechos casuales no puede apoyarse la demostración de una cualidad general para todos los triángulos.

Una peculiaridad muy importante de la demostración geométrica, y que determina en alto grado su necesidad, es la de que por medio de ella se establecen las propiedades GENERALES de las figuras espaciales. Si la demostración está bien hecha y se apoya en proposiciones iniciales correctas, esto nos da la seguridad indudable en la veracidad de la proposición demostrada. Por esto precisamente estamos convencidos de que cualquier teorema geométrico, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, es justo para triángulos de cualesquiera dimensiones, tanto si sus lados tienen varios milímetros de longitud, como si tienen millones de kilómetros.

4. Finalmente, existe otra razón más, extraordinariamente importante, que condiciona la necesidad de la demostración. Se trata de que la geometría no es una colección casual de verdades que definen las propiedades espaciales de los cuerpos, sino UN SISTEMA CIENTÍFICO construido de acuerdo con leyes rigurosas. En este sistema cada teorema está relacionado orgánicamente con un conjunto de proposiciones antes establecidas y esta relación se pone de manifiesto por medio de la demostración. Por ejemplo, el conocido teorema acerca de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, se demuestra basándose en las propiedades de las rectas paralelas, lo que indica la relación directa que existe entre la teoría de las rectas paralelas y las propiedades de las sumas de los ángulos internos de los polígonos. Del mismo modo, en las propiedades de las rectas paralelas se apoya toda la teoría de la semejanza de las figuras.

De esta forma, cada teorema geométrico está relacionado por todo un sistema de deducciones con teoremas antes demostrados, estos últimos, con teoremas demostrados con mayor anterioridad y así sucesivamente, alargándose las cadenas de estas deducciones hasta llegar a las proposiciones fundamentales y los axiomas que constituyen la base de todo el edificio de la geometría. Este sistema de relaciones es fácil de seguir tomando cualquier teorema geométrico y analizando todas aquellas proposiciones en que éste se apoya.

Resumiendo todo lo expuesto sobre la necesidad de la demostración, podemos decir lo siguiente:

a) En geometría sólo se admite sin demostración un pequeño número de verdades fundamentales o axiomas. Todas las demás verdades —teoremas— se demuestran basándose en estos axiomas mediante una serie de deducciones. La veracidad de los propios axiomas está garantizada porque tanto ellos mismos como los teoremas que se demuestran apoyándose en ellos han sido comprobados por reiteradas observaciones y larga experiencia.

b) La demostración se realiza en virtud del requerimiento de una de las leyes fundamentales de nuestro pensamiento, el principio de la razón suficiente, que establece la necesidad de que la veracidad de nuestras afirmaciones esté rigurosamente fundamentada.

c) Una demostración bien estructurada sólo puede apoyarse en proposiciones antes demostradas, siendo inadmisible toda alegación a la evidencia[1].

d) La demostración es necesaria también para fundamentar la generalidad de la proposición que se demuestra, es decir, la posibilidad de su aplicación a todos casos particulares.

e) Finalmente, por medio de las demostraciones, las verdades geométricas se reducen a un sistema armonioso de conocimientos científicos en el cual se ponen de manifiesto todas las relaciones internas que existen entre las diversas propiedades de las formas espaciales.

3. ¿CÓMO DEBE SER LA DEMOSTRACIÓN?

1. Pasemos ahora a la siguiente cuestión: ¿qué condiciones debe satisfacer una demostración para que pueda considerarse *correcta*, es decir, que garantiza la veracidad de la deducción hecha de proposiciones verdaderas? Ante todo hay que prestar atención al hecho de que cada demostración consta de una serie de deducciones, por esto la correción o incorrección de la demostración depende de la corrección o incorrección de las deducciones que intervienen en ella.

Como ya hemos visto antes, el razonamiento deductivo es la aplicación de cierta ley general a un caso particular dado.Para no cometer errores en las deducciones hay que conocer algunos esquemas mediante los cuales se representan las correlaciones entre cualesquiera

[1] Muchos postulados de la ciencia que se consideraban indiscutibles en virtud de su evidencia, resultaron ser falsos con el tiempo. Por esto, en cualquier ciencia, cada proposición debe ser demostrada rigurosamente.

conceptos, incluidos los geométricos. Demostraremos esto con un ejemplo. Supongamos que se ha hecho la siguiente deducción: 1) En todos los rectángulos las diagonales son iguales entre sí. 2) Todos los cuadrados son rectángulos. 3) Deducción: en todos los cuadrados las diagonales son iguales entre sí.

¿Qué tenemos en este caso? La primera proposición establece una ley general en la cual se afirma que todos los rectángulos, es decir, TODA LA CLASE de figuras geométricas llamadas rectángulos, pertenece a la clase de cuadriláteros que tienen iguales las diagonales. La segunda proposición afirma que toda la clase de los cuadrados es parte de la clase de los rectángulos. De esto podemos deducir con pleno fundamento que toda la clase de los cuadrados es parte de la clase de los cuadriláteros que tienen iguales las diagonales. Expresemos este razonamiento de una forma general. Designemos la clase más extensa (de los cuadriláteros que tienen iguales las diagonales) con la letra *P*, la clase intermedia (de los rectángulos), con la letra *M*, y la clase menor (de los cuadrados), con la letra *S*. En este caso el razonamiento en forma esquemática tendrá la forma siguiente:

1) Todo *M* es *P*.

2) Todo *S* es *M*.

3) Conclusión: todo *S* es *P*.

Esta relación es fácil de representar gráficamente. La clase mayor *P* la representaremos por una circunferencia grande (fig. 7). La clase *M*, por una circunferencia menor que se encuentra totalmente dentro de la primera. Finalmente, la clase *S* la representaremos por otra circunferencia aún menor situada dentro de la segunda. Es indudable que si las circunferencias están dispuestas de este modo, la circunferencia *S* se halla totalmente dentro de la circunferencia *P*.

Esta representación de la correlación entre los conceptos fue propuesta por el gran matemático Leonhard Euler, miembro de la Academia de Ciencias de S. Petersburgo (1707—1783).

Por medio de un esquema semejante pueden representarse otras formas de razonamiento. Examinemos un razonamiento que contenga una conclusión negativa:

1) Todos los cuadriláteros en los cuales la suma de los ángulos opuestos no es igual a 180°, no pueden inscribirse en una circunferencia.

2) En el paralelogramo oblicuángulo la suma de los ángulos opuestos no es igual a 180°.

3) Conclusión: el paralelogramo oblicuángulo no puede inscribirse en una circunferencia.

Designemos la clase de los cuadriláteros que no pueden inscribirse en una circunferencia con la letra *P*, la clase de los cuadriláteros en que la suma de los ángulos opuestos no es igual a 180°, con la letra *M*,

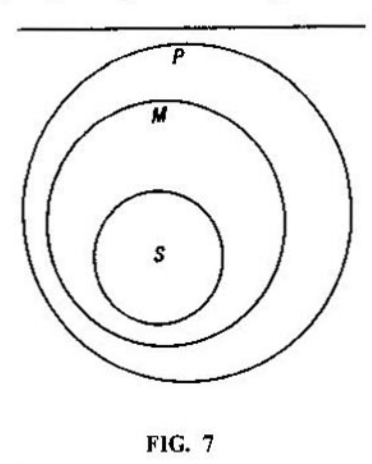


FIG. 7

y la clase de los paralelogramos oblicuángulos, con la letra *S*. Entonces nos convenceremos de que nuestro razonamiento se estructura según este esquema:

1) Ningún *M* es *P*.

2) Todo *S* es *M*.

3) Conclusión: Ningún *S* es *P*.

Esta correlación también puede representarse gráficamente por medio de las circunferencias de Euler (fig. 8).

La inmensa mayoría de los razonamientos deductivos se desarrollan en geometría de acuerdo con el esquema primero o con el segundo.

2. Esta forma de representar las correlaciones entre los conceptos geométricos da la posibilidad de comprender bien la estructura de cualquier razonamiento y de descubrir el error en las conclusiones incorrectas.

Como ejemplo analizaremos el razonamiento antes descrito del alumno del octavo grado, que el profesor consideró incorrecto. El alumno hizo este razonamiento:

1) En todos los cuadriláteros circunscritos las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí.

2) En el trapecio dado las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí.

3) Conclusión: el trapecio dado puede ser circunscrito en una circunferencia.

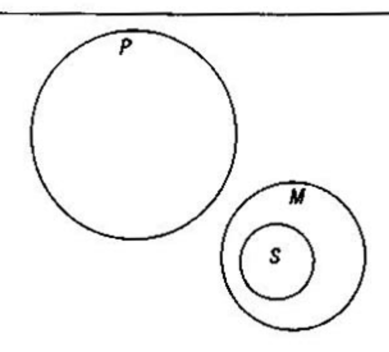


FIG. 8

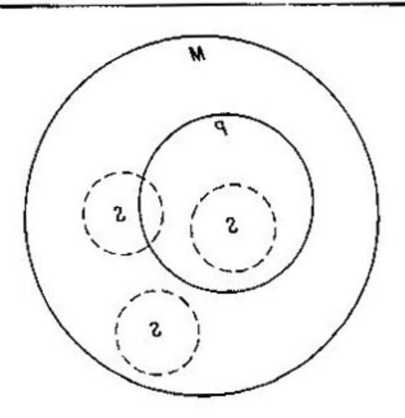


FIG. 9

Designando la clase de los cuadriláteros circunscritos por *P*, la clase de los cuadriláteros en los cuales son iguales las sumas de los lados opuestos, por *M*, y la clase de los trapecios en los cuales la suma de las bases es igual a la suma de los lados no paralelos, por *S*, reducimos el

razonamiento al esquema siguiente:

1) Todo P es M.

2) Todo S es M.

3) Conclusión: todo S es P, lo cual es UN ERROR,

ya que representando las correlaciones entre las clases por medio de las circunferencias de Euler (fig. 9), vemos que P y S se encuentran dentro de M, pero no podemos sacar ninguna conclusión sobre la dependencia entre S y P.

Para convencernos aún más de que la deducción hecha es errónea, pondremos como ejemplo un razonamiento completamente análogo:

1) Todos los ángulos adyacentes suman 180°.

2) Dos angulos dados suman 180°.

3) Conclusión: por consiguiente, los ángulos dados son adyacentes. Esta deducción es, naturalmente, errónea, puesto que los ángulos dados pueden sumar 180° sin ser adyacentes (por ejemplo, los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito). ¿Por qué se obtienen estos resultados erróneos? Porque el que emplea semejante razonamiento se refiere al teorema DIRECTO, en vez de referirse al RECÍPROCO. En el ejemplo del cuadrilátero circunscrito se toma como base el teorema que dice que en todo cuadrilátero circunscrito las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí. El teorema recíproco, acerca de que en todo cuadrilátero en el cual las sumas de los lados opuestos sean iguales entre sí se puede inscribir una circunferencia, no se demuestra en el libro de texto oficial, aunque puede demostrarse, como haremos más adelante.

Si este teorema hubiera sido demostrado, el razonamiento correcto podría haberse estructurado de esta forma:

1) En todo cuadrilátero en el cual las sumas de los lados opuestos sean iguales entre sí, puede inscribirse una circunferencia.

2) En el trapecio dado la suma de las bases es igual a la suma de los lados no paralelos.

3) Conclusión: por consiguiente, en el trapecio dado puede inscribirse una circunferencia. Esta deducción es completamente correcta, puesto que está construida según el esquema que ilustra la fig. 6.

1) Todo M es P.

2) Todo S es M.

3) Conclusión: todo S es P.

Así, el error del alumno de octavo grado consistía en que él, para

hacer su demostración, se apoyaba en el teorema directo, cuando tenía que haberse apoyado en el recíproco.

3. Demostremos este importante teorema recíproco.

TEOREMA. *En todo cuadrilátero en que las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí, puede inscribirse una circunferencia.*

En primer lugar advertimos que si en un cuadrilátero puede inscribirse una circunferencia, el centro de esta circunferencia equidistará de todos sus lados. Como la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia de sus lados, el centro de la circunferencia inscrita se encontrará en la bisectriz de cada ángulo interno. Por lo tanto, el centro de la circunferencia inscrita será el punto de intersección de las cuatro bisectrices de los ángulos internos del cuadrilátero.

Si por lo menos tres de las bisectrices del cuadrilátero se cortan en un mismo punto, por este mismo punto pasará también la cuarta bisectriz y este punto se encontrará a distancias iguales de los cuatro lados y será el centro de la circunferencia inscrita. Esto puede demostrarse por medio de los mismos razonamientos que se dan cuando se demuestra el teorema sobre la existencia de una circunferencia inscribible en el triángulo y, por esto, dejamos al lector que haga por su cuenta esta demostración.

Pasamos a la parte principal de la demostración. Supongamos que existe un cuadrilátero $ABCD$ (fig. 10) en el cual se cumple la correlación

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Ante todo excluimos el caso en que el cuadrilátero dado es un rombo, porque en el rombo las diagonales son las bisectrices de los ángulos internos y, por lo tanto, su punto de intersección es el centro de la circunferencia inscribible, es decir, en un rombo siempre se puede incribir una circunferencia. Supongamos por esto que nuestro cuadrilátero tiene dos lados contiguos desiguales. Sea, por ejemplo, $AB > BC$. Entonces, en virtud de la igualdad (1) tendremos que $CD < AD$. Tomando sobre AB un segmento $BE = BC$, obtenemos el triángulo isósceles BCE, y tomando sobre AD un segmento $DF = CD$, obtenemos el triángulo isósceles CDF. Vamos a demostrar que el $\triangle AEF$ también es isósceles. En efecto, pasando en la igualdad (1) BC al segundo miembro y CD al primero, obtenemos: $AB - BC = AD - CD$, pero $AB - BC = AE$ y $AD - CD = AF$. Por lo tanto $AE = AF$ y el $\triangle AEF$ es isósceles. En los tres triángulos isósceles obtenidos trazamos las bisectrices de los ángulos en los vértices, es decir, las bisectrices del $\angle B$,

$\angle D$ y $\angle A$. Estas tres bisectrices son perpendiculares a las bases *CE*, *CF* y *EF* y las dividen en dos partes iguales. Por consiguiente, son perpendiculares levantadas sobre los puntos medios de los lados del triángulo *CEF* y por esto deben cortarse en el mismo punto. De aquí se infiere que tres bisectrices de nuestro cuadrilátero se cortan en un mismo punto, el cual, como ya se demostró antes, será el centro de la circunferencia que se inscriba.

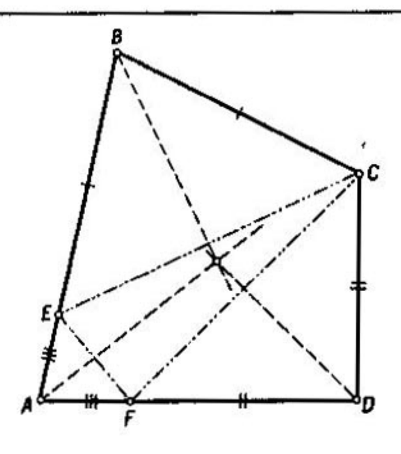


FIG. 10

4. Con bastante frecuencia nos encontramos con el siguiente error en la demostración: en vez de referirse al teorema recíproco se refieren al directo. Hay que prestar mucha atención para no caer en este error. Por ejemplo, si a los alumnos se les propone determinar la forma de un triángulo cuyos lados tienen respectivamente 3, 4 y 5 unidades de longitud, suelen responder que este triángulo es rectángulo, porque la suma de los cuadrados de dos de sus lados, $3^2 + 4^2$, es igual al cuadrado del tercer lado, 5^2, y hacen referencia al teorema de Pitágoras, aunque hay que referirse a su teorema recíproco. Este último afirma que si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, este triángulo es rectángulo. Aunque en el libro de texto oficial se demuestra este teorema, es frecuente no concederle la debida atención, lo cual suele ser causa del error antes indicado.

En relación con esto es útil establecer las condiciones con las cua-

les son verdaderos simultánemente los teoremas directo y recíproco. Ya conocemos ejemplos en los que los teoremas directo y recíproco son ciertos al mismo tiempo, pero pueden ponerse no menos ejemplos en los que el teorema directo es verdad y el recíproco no. Por ejemplo, un teorema directo afirma correctamente que los áng los opuestos por el vé·tice son iguales entre sí, mientras que el teorema recíproco, que debe afirmar que todos los ángulos iguales entre sí son ángulos opuestos por el vértice, es falso, naturalmente.

Para comprender claramente la relación que existe entre el teorema directo y el recíproco hay que volver a recurrir a la representación esquemática de esta relación. Si el teorema directo contiene la afirmación: "Todo *S* es *P*" ("Todos los pares de ángulos opuestos por el vértice son pares de ángulos iguales entre sí"), el teorema recíproco debe contener la afirmación: "Todo *P* es *S*" ("Todos los pares de ángulos iguales entre sí son pares de ángulos opuestos por el vértice"). Representando la correlación entre los conceptos en el teorema primero por medio de las circunferencias de Euler (fig. 11), nos convencemos de

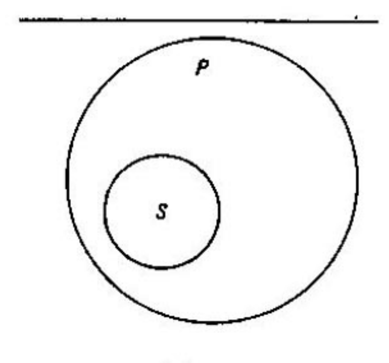


FIG. 11

que la clase *S* es una parte de la clase *P* y, en general, podemos afirmar que "Algún *P* es *S*", es decir, "algunos pares de ángulos iguales entre sí son pares de ángulos opuestos por el vértice".

¿Qué condiciones deben existir para que simultáneamente sean verdaderas la proposición "Todo *S* es *P*" y la proposición "Todo *P* es *S*"? Es completamente evidente que esto puede ocurrir si y sólo si las clases *S* y *P* sean IDÉNTICAS ($S \equiv P$). En este caso la circunferencia que representa a *S* coincide con la circunferencia que representa a *P* (fig. 12). Por ejemplo, para el teorema "Todos los triángulos isósceles tienen iguales los ángulos adyacentes a la base" también es correc-

ta la afirmación recíproca: "Todos los triángulos que tienen iguales los ángulos adyacentes a la base son triángulos isósceles". Esto se explica porque toda la clase de triángulos isósceles y la clase de los triángulos que tienen iguales los ángulos adyacentes a la base son una misma clase. También coinciden exactamente la clase de los triángulos rectángulos y la clase de los triángulos en los cuales el cuadrado de

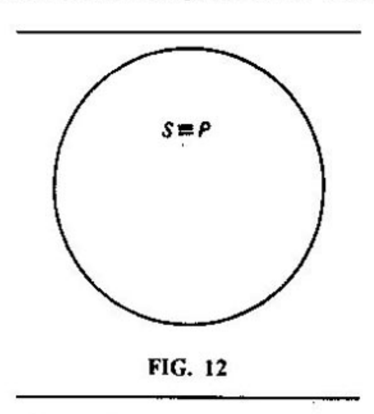


FIG. 12

uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Nuestro alumno de octavo grado "tuvo suerte", ya que resolvió el problema a pesar de que se apoyó en el teorema directo en vez de hacerlo en el recíproco.

Pero esto sólo fue posible porque la clase de los cuadriláteros en los cuales puede inscribirse una circunferencia coincide con la clase de los cuadriláteros en los cuales las sumas de los lados opuestos son iguales entre sí. (En este caso resultó ser verdad que "Todo *P* es *M*" y que "Todo *M* es *P*", véase el esquema de la deducción en la pág. 22).

Este análisis muestra al mismo tiempo que el teorema recíproco, si es correcto, no es una consecuencia evidente del directo, sino que *siempre requiere una demostración especial.*

5. A veces puede parecer que los teoremas directo y recíproco no encajan en el esquema "Todo *S* es *P*" y "Todo *P* es *S*". Esto ocurre en aquellos casos en que dichos teoremas se expresan en la forma llamada "razonamiento condicional", que esquemáticamente se puede escribir de la forma siguiente: "Si *A* es *B*, *C* es *D*". Por ejemplo: "Si un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia, las sumas de sus lados opuestos son iguales entre sí". La primera parte de esta proposición —"Si *A* es *B*"— se llama *condición* del teorema, y la segunda —"*C* es *D*"— se llama *conclusión*. El teorema recíproco se obtiene del

directo de modo que la conclusión pasa a ser condición y la condición, conclusión. En muchos casos la expresión del teorema en forma de razonamiento condicional es más habitual que en la forma "Todo *S* es *P*", que se llama "categórica". Sin embargo, no es difícil convencerse de que esta diferencia no es esencial y de que todo razonamiento condicional puede transformarse fácilmente en categórico y todo categórico en condicional. Por ejemplo, el teorema expresado en forma condicional: "Si dos rectas paralelas se cortan por una tercera, los ángulos alternos internos son iguales entre sí", puede expresarse en forma categórica así: "Las rectas paralelas, cuando se cortan por una tercera recta, forman ángulos alternos internos iguales". De este modo nuestros razonamientos siguen también en vigor para los teoremas expresados en forma condicional. En ellos la veracidad simultánea del teorema directo y del recíproco también está condicionada por la coincidencia de las clases de los conceptos correspondientes. Así, en el ejemplo que acabamos de examinar son justos al mismo tiempo los teoremas directo y recíproco, ya que la clase de las "rectas paralelas" es idéntica a la clase de las "rectas que cuando se cortan por una tercera forman ángulos alternos internos iguales".

6. Pasamos ahora a estudiar otras incorrecciones de las demostraciones. Es bastante frecuente que el error en la demostración tenga por causa el que ésta se apoye en casos particulares, sin tener en cuenta que la figura dada tiene otras propiedades. Este error fue precisamente el cometido por mi vecino Tolia, que quiso demostrar el teorema general del ángulo externo de cualquier triángulo, limitándose a considerar únicamente el triángulo acutángulo, en el cual, efectivamente, todos los ángulos externos son obtusos y todos los internos, agudos.

Pondremos otro ejemplo de este tipo de error en una demostración, siendo aquél mucho menos apreciable en este caso. Antes pusimos el ejemplo de dos triángulos DESIGUALES (véase la fig. 4) en los cuales, no obstante, son respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Ahora vamos a dar un ejemplo de "demostración" que, a pesar del hecho establecido, afirma que los triángulos que satisfacen las condiciones antes indicadas serán iguales necesariamente. Esta demostración es interesante también porque se parece mucho a la del tercer criterio de igualdad de triángulos que se da en el libro de texto oficial.

Supongamos que en el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$ (fig. 13) se da que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $\angle C = \angle C'$. Para hacer la demostración aplicamos el $\triangle A'B'C'$ al $\triangle ABC$ de tal forma que el lado $A'B'$ coincida con

el AB y el punto C' ocupe la posición C''. Unimos los puntos C y C'' y suponemos que el segmento CC'' corta al lado AB entre los puntos A y B (fig. 13,a). Por la condición inicial, el $\triangle ACC''$ es isósceles ($AC = AC''$) y, por lo tanto, $\angle ACC'' = \angle AC''C$, y como $\angle C = \angle C''$, restando de unos ángulos iguales los otros también iguales, obtenemos que $\angle BCC'' = \angle BC''C$ y, por consiguiente, el $\triangle CBC''$ también es

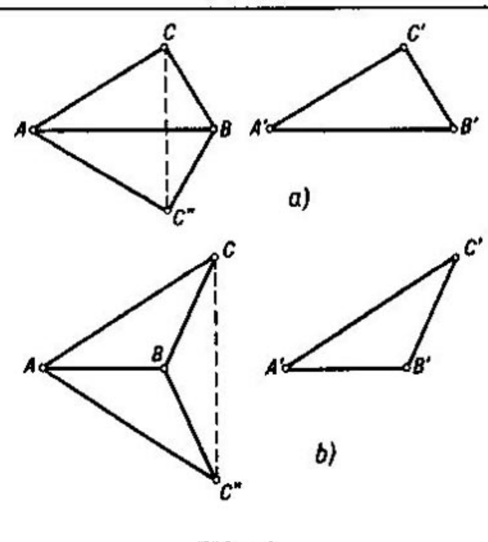


FIG. 13

isósceles. Por esto $BC = BC''$ y $\triangle ABC = \triangle ABC''$ por tener tres lados iguales. Así, pues, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Si el segmento CC'' corta a la recta AB fuera del segmento AB, el teorema sigue siendo justo (fig. 13, b). En efecto, el $\triangle ACC''$ también en este caso es isósceles y $\angle ACC'' = \angle AC''C$. Pero como $\angle C = \angle C''$, restando estos ángulos de los dos de la ecuación precedente, volvemos a obtener que $\angle BCC'' = \angle BC''C$, que el $\triangle BCC''$ es isósceles, $BC = BC''$, y otra vez llegamos al tercer criterio de igualdad de triángulos, es decir, de nuevo $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Parece que hemos dado una demostración suficientemente completa y que hemos agotado todos los casos posibles. Pero resulta que nos hemos olvidado del caso también posible en que el segmento CC'' pase precisamente por el extremo del segmento AB. En la fig. 14 el segmento CC'' pasa por el punto B. Se ve fácilmente que en este caso

nuestros razonamientos son inaplicables y que los triángulos pueden ser completamente distintos, como se muestra en la fig. 14.

Otro ejemplo muy aleccionador de errores de este mismo tipo son los teoremas sobre el área lateral del prisma oblicuo y la equivalencia de los prismas recto y oblicuo, que figuran en el libro de texto oficial

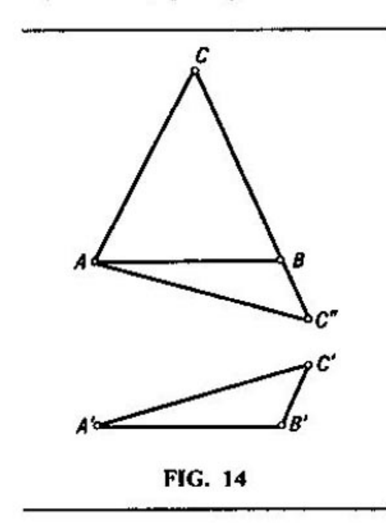


FIG. 14

de A. P. Kiseliov y en el curso de geometría elemental de N. A. Glagólev. El primero de estos teoremas afirma : "El área lateral de un prisma es igual al producto del perímetro de la sección perpendicular por la arista lateral" (A. P. KISELIOV, Geometría, II parte, pág. 38, en ruso). El segundo teorema dice : "Todo prisma es equivalente a un prisma recto que tenga por base la sección perpendicular del prisma oblicuo y por altura su arista lateral" (N. A. GLAGÓLEV, Geometría, II parte, pág. 89, en ruso). Sin embargo, es fácil convencerse de que uno y otro teorema sólo se han demostrado para un caso particular, concretamente, para cuando las aristas del prisma son tan largas que puede trazarse en él una sección perpendicular. Pero existe toda una clase de prismas en los cuales ES IMPOSIBLE TRAZAR UNA SECCIÓN PERPENDICULAR QUE CORTE TODAS LAS ARISTAS LATERALES. Esta clase es la de los prismas oblicuos de altura muy pequeña (fig. 15). En un prisma de este tipo la sección perpendicular a una de las aristas laterales no corta las demás aristas, y todos los razonamientos que se dan en la demostración de estas proposiciones resultan inaplicables. En este caso se debe el error a la costumbre arraigada que tenemos de figurarnos el prisma en for-

ma de barra con altura bastante grande, mientras que los prismas bajos, en forma de tabla, casi nunca se representan en la pizarra, ni en los cuadernos y libros de texto. Este ejemplo muestra también la precaución que debemos tener con el dibujo que se emplea para ilustrar la demostración. Cuando hacemos una construcción cualquiera necesaria para una demostración, debemos preguntarnos siempre: "¿Puede

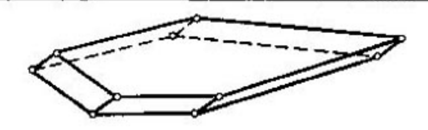


FIG. 15

hacerse esta construcción en todos los casos?" De haberse formulado esta pregunta al hacer la demostración de las proposiciones antes indicadas acerca del prisma oblicuo, no hubiera sido difícil hallar un ejemplo de prisma en el cual habría sido imposible trazar una sección perpendicular.

7. En los dos últimos ejemplos lo esencial del error consiste en que *no se demuestra la proposición que hay que demostrar, sino únicamente cierto caso particular,* ligado a las peculiaridades de la figura con respecto a la cual se hizo la demostración. Puede ponerse otro ejemplo de error de este tipo, aunque más profundo y que salta menos a la vista.

Nos referimos a la demostración de la existencia de segmentos inconmensurables, que se expone generalmente en el curso de geometría elemental de la escuela. Recordemos de un modo resumido la marcha general de los razonamientos al hacer esta demostración. Primero se da la definición de la medida común a dos segmentos y se establece que esta medida común estará contenida un número entero de veces en la suma y en la diferencia de los segmentos dados. Luego se da el método para buscar la medida común, que ya era conocido por Euclides. Este procedimiento consiste en que, sobre el segmento mayor, se toma el menor tantas veces como quepa, el primer resto se toma sobre el segmento menor, el segundo resto, sobre el primero y así sucesivamente. El resto que esté contenido un número entero de veces en el resto anterior será la mayor medida común de los segmentos dados. Después se dice que los segmentos que tienen una medida común se llaman *conmensurables* y los que carecen de medida común, *inconmensurables*. Pero el mismo hecho de la existencia de los segmentos incon-

mensurables debe demostrarse teóricamente mediante el descubrimiento de un par, por lo menos, de dichos segmentos. Como ejemplo suele ponerse la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado del mismo. La demostración se hace aplicando el método de Euclides, es decir, tomando sobre la diagonal del cuadrado el lado, sobre éste el primer resto y así sucesivamente. Al hacer esto se pone de manifiesto que la diferencia entre la diagonal y el lado es el lado de un nuevo cuadrado, que a su vez hay que tomar sobre la nueva diagonal, etc., por lo que este proceso no terminará nunca y la medida común máxima de la diagonal del cuadrado y de su lado será imposible de hallar. Después de esto se saca la conclusión: por consiguiente, es imposible hallar la medida común del lado del cuadrado y de su diagonal y de aquí se infiere que estos segmentos son inconmensurables.

¿En qué consiste el error de esta demostración? El error consiste en este caso en que de LA IMPOSIBILIDAD DE HALLAR LA MEDIDA COMÚN POR EL METODO DE EUCLIDES no se deduce en modo alguno que dicha medida común no exista. Porque si no podemos hallar un objeto cualquiera valiéndonos de un procedimiento determinado de búsqueda, esto no quiere decir que dicho objeto no exista, ya que es posible que pueda encontrarse por otros procedimientos. Por ejemplo, no podríamos estar conformes con un razonamiento como este: "Los electrones, no pueden verse con ningún microscopio, por lo tanto, los electrones no existen". Está claro que a este razonamiento puede objetarse fácilmente que: "Además del microscopio existen otros medios y procedimientos con los cuales podemos convencernos de la existencia de los electrones".

Para que la demostración de que existen segmentos inconmensurables sea completa hay que demostrar previamente la siguiente proposición.

Si el proceso de búsqueda de la medida común máxima de dos segmentos puede prolongarse indefinidamente, estos segmentos son inconmensurables.

Demostremos esta importante proposición. Sean $\bar{a}$ y b los segmentos dados (designaremos con letras con una raya encima los segmentos, y con letras sin raya, los números), siendo $\bar{a} > \bar{b}$. Supongamos que al llevar sucesivamente el segmento $\bar{b}$ sobre el $\bar{a}$, el primer resto $\bar{r}_1$ sobre $\bar{b}$, etc., se obtiene una serie ilimitada de restos: $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots$, siendo cada resto anterior mayor que el que le sigue. Así, tendremos:

$$\bar{a} > \bar{b} > \bar{r}_1 > \bar{r}_2 > \bar{r}_3 > \ldots$$

Supongamos ahora que los segmentos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tienen una medida común

p, la cual, de acuerdo con las propiedades de la medida común, deberá estar comprendida un número de veces en $\bar{a}$, en $\bar{b}$ y en cada uno de los restos $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \ldots$ Supongamos que esta medida está comprendida en $\bar{a}$ m veces, en $\bar{b}$ n veces, en $\bar{r}_1$ n_1 veces, en $\bar{r}_2$ n_2 veces, ... en $\bar{r}_k$ n_k veces y así sucesivamente. Los números m, n, n_1, n_2, ... son enteros y positivos y, en virtud de las desigualdades entre los segmentos, tendremos las desigualdades respectivas entre los números

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$$

Como supusimos que la serie de los segmentos se prolonga infinitamente, la serie de los números $m, n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ también deberá prolongarse infinitamente, LO CUAL ES IMPOSIBLE; ya que la serie descendiente sucesivamente de los números enteros positivos no puede ser infinita. La contradicción obtenida nos obliga a renunciar a la suposición de que existe una medida común de los dos segmentos considerados, es decir, a reconocer que son inconmensurables. El ejemplo del cuadrado nos convence de la existencia de segmentos en los cuales el proceso indicado no puede terminar nunca, lo que significa que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado.

Sin esta proposición adicional la demostración de que existen segmentos inconmensurables no logra su fin, puesto que lo demostrado es totalmente distinto de la proposición que teníamos que demostrar.

8. Las demostraciones incurren con mucha frecuencia en otro tipo de errores que consiste en que la demostración se apoya en una proposición aún no demostrada. Y, aunque es menos corriente, suele ocurrir también que el demostrante recurre precisamente a la proposición que está demostrando. Así, por ejemplo, puede oírse a veces el siguiente diálogo entre el profesor y el alumno. El profesor pregunta: "¿Por qué son perpendiculares estas rectas?" El alumno responde: "Porque el angulo que hay entre ellas es recto". —"¿Y por qué es recto el ángulo?" —"Porque las rectas son perpendiculares".

Este error se llama "retorno a la demostración" y no es corriente encontrarlo de una forma tan clara. Lo más frecuente es hallarlo enmascarado. Por ejemplo, a un alumno le pusieron el problema siguiente: "Demostrar que si dos bisectrices de un triángulo son iguales, el triángulo es isósceles".

La demostración la hizo así: "Sea en el $\triangle ABC$ la bisectriz AM igual a la bisectriz BN (fig. 16). Consideremos el $\triangle ABM$ y el $\triangle ABN$, los cuales son iguales, puesto que $AM = BN$, AB es común y $\angle ABN = \angle BAM$ como mitades que son de los ángulos iguales adyacentes a la base. De este modo, $\triangle ABM = \triangle ABN$ y, por lo tanto,

$AN = BM$. Después consideramos el $\triangle ACM$ y el $\triangle BCN$, que son iguales, ya que $AM = BN$ y los ángulos adyacentes a estos lados son respectivamente iguales. Por esto $CN = CM$ y, por consiguiente, $AN + NC = BM + CM$, es decir, $AC = BC$, que es lo que había que demostrar".

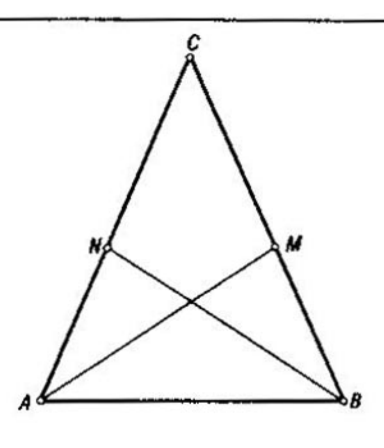


FIG. 16

El error de esta demostración consiste en que se cita la igualdad de los ángulos adyacentes a la base del triángulo. Pero la igualdad de estos ángulos es consecuencia de que el triángulo sea isósceles, y ésta es precisamente la proposición que hay que demostrar.

También son frecuentes los casos en que, para hacer la demostración, se toman como base proposiciones no demostradas, considerándolas como evidentes, aunque dichas proposiciones no estén incluidas entre los axiomas. Veamos dos ejemplos. Al estudiar el problema de la posición mutua de la recta y la circunferencia se consideran tres casos: 1) la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio, es decir, la recta pasa por fuera de la circunferencia; 2) la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio, o sea, la recta tiene un punto común, y solamente uno, con la circunferencia (tangente); 3) la distancia del centro a la recta es menor que el radio, y la recta tiene dos puntos comunes con la circunferencia (secante).

Llamamos la atención sobre el hecho de que las dos primeras proposiciones se acompañan de demostraciones correctas, mientras que en el tercer caso suele decirse: "La recta pasa por un punto situado

dentro de la circunferencia y, en este caso, ES EVIDENTE que corta a la circunferencia". Sin embargo, se ve fácilmente que, en este razonamiento, bajo la palabra "evidente" se oculta una proposición geométrica muy importante: "Toda recta que pasa por un punto interno de la circunferencia, corta a ésta". Es cierto que esta proposición es bastante evidente, pero ya hemos dicho antes lo vago e indeterminado que es el concepto de evidencia. Por lo tanto, esta proposición debe incluirse entre los axiomas o demostrarse apoyándose en otras proposiciones.

Como segundo ejemplo citaremos la demostración del teorema recíproco al del cuadrilátero circunscrito, que se da en algunos cursos de geometría elemental. Hay que demostrar que *si en un cuadrilátero las sumas de los lados opuestos son iguales, en este cuadrilátero puede inscribirse una circunferencia.*

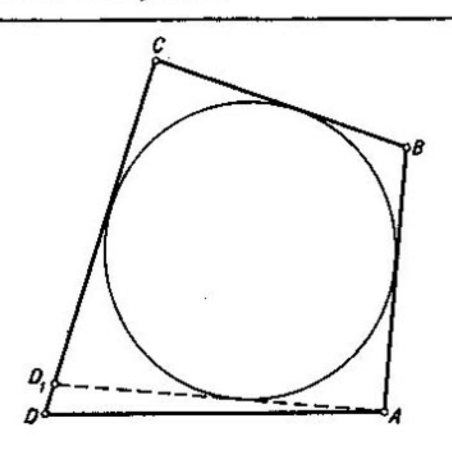


FIG. 17

Citamos literalmente esta demostración: "Se da $AB + CD = BC + AD$ (fig. 17). Trazamos una circunferencia tangente a los lados AB, BC y CD. Demostremos que también será tangente al lado AD. Supongamos que no lo fuera. Trazando desde el punto A la tangente AD_1 obtenemos el cuadrilátero circunscrito $ABCD_1$, en él, en virtud del teorema directo, $AB + CD_1 = BC + AD_1$. Restando miembro a miembro esta igualdad de la dada, obtenemos que: $CD - CD_1 = AD_1 - AD$, o que $DD_1 = AD_1 - AD$, lo cual es imposible (porque la diferencia de dos lados del $\triangle ADD_1$ no puede ser igual al

tercer lado). Por consiguiente, la circunferencia tangente a los lados AB, BC y CD también es tangente al lado AD."

El error de esta demostración consiste en que se apoya en el conocimiento, aún no demostrado, de la posición del punto A: hay que demostrar primeramente que *el punto de tangencia de la circunferencia se halla entre los puntos A y B*. Si los puntos A y D ocupan la posición que se indica en la figura 18, con respecto a ellos no podrán hacerse

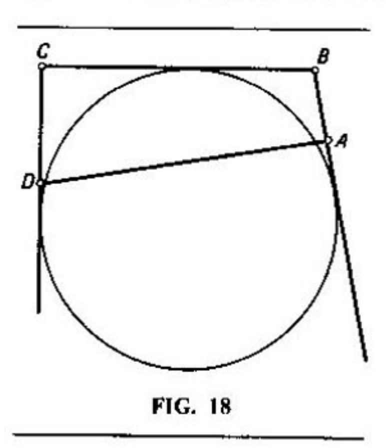


FIG. 18

los razonamientos que se dan en la demostración. Que los puntos de tangencia deben encontrarse entre A y B y entre C y D se puede demostrar, pero esto conduce a razonamientos bastante largos, por lo que es preferible utilizar la demostración que antes indicamos (véase la pág. 23).

De este modo, a nuestra pregunta acerca de qué condiciones debe satisfacer una demostración para ser correcta, es decir, para poder garantizar la veracidad de la proposición, debemos responder así:

a) La demostración debe apoyarse únicamente en proposiciones verdaderas, es decir, en los axiomas y en los teoremas ya demostrados.

b) Todas las conclusiones de que conste la demostración deben estar bien construidas.

c) Hay que tener siempre en cuenta el objeto de la demostración, es decir, el establecimiento de la veracidad de la proposición que se demuestra, y no sustituir esta proposición por cualquiera otra [1].

[1] Como ocurrió en el ejemplo en la pág. 30.

9. En relación con la necesidad de cumplir estos requisitos es natural que se plantee la pregunta: ¿pero cómo encontrar la demostración correcta?

Vamos a dar varios ejemplos para resolver este problema. En primer lugar, cuando recibimos una proposición geométrica para demostrarla, hay que destacar bien claramente LA IDEA PRINCIPAL que debe ser objeto de la demostración. Es frecuente que esta idea no esté expresada con suficiente claridad. Por ejemplo, tenemos la siguiente proposición: "Demostrar que uniendo sucesivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo". ¿Con qué podemos demostrar que, en efecto, se obtiene un paralelogramo? Para responder a esta pregunta recordaremos LA DEFINICIÓN de paralelogramo como un cuadrilátero en el cual los lados opuestos son paralelos dos a dos. Por lo tanto hay que demostrar el paralelismo de los segmentos obtenidos.

Después de destacar la proposición que debemos demostrar, del texto del teorema dado hay que separar aquellas condiciones que se dan en el mismo y que necesitamos para la demostración. En nuestro ejemplo se dice que unimos LOS PUNTOS MEDIOS de los lados del cuadrilátero, lo que quiere decir que en los lados del cuadrilátero se toman los puntos que dividen cada lado en dos partes iguales.

Todo esto lo formalizaremos de acuerdo con la escritura simbólica que se emplea generalmente en la práctica escolar y que se incluye bajo las rúbricas "Se da" y "Hay que demostrar". Así, en nuestro ejemplo, si tenemos el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 19) y M, N, P, Q son los puntos medios de sus lados, nuestro teorema puede escribirse así:

SE DA: en el cuadrilátero $ABCD$ $MA = MB$, $NB = NC$, $PC = PD$ $QD = QA$.

HAY QUE DEMOSTRAR: $MN \| PQ$ y $MQ \| NP$.

Una vez que esto se ha escrito, comienza la demostración del teorema. Para hacerla hay que utilizar los axiomas y teoremas ya establecidos y a la vez (y esto debe recordarse perfectamente) las correlaciones esenciales que se indican en las condiciones del teorema.

10. Pero, ¿cómo hallar el orden de los razonamientos que debe enlazar la proposición que se demuestra con las verdades antes establecidas y con las condiciones del teorema? ¿Cómo elegir, entre el gran número de proposiciones distintas, precisamente aquellas que pueden servirnos para demostrar nuestro teorema?

Lo más razonable en nuestra búsqueda es partir de la proposición que hay que demostrar y plantearse el problema así: ¿cómo consecuencia de qué proposición puede obtenerse la proposición que demostramos? Si hallamos dicha proposición y ésta es consecuencia de

las condiciones y de teoremas demostrados ya, nuestro problema estará resuelto. Si no es así, volveremos a plantearnos la misma pregunta, pero ya con respecto a esta nueva proposición y así sucesivamente. Esta vía del pensamiento recibe en la ciencia el nombre de *análisis*.

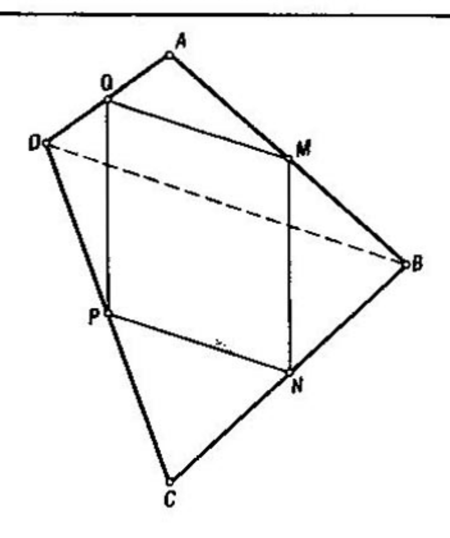


FIG. 19

En el ejemplo del cuadrilátero que nos ocupa hay que demostrar el paralelismo de ciertos segmentos. Al mismo tiempo recordamos que estos segmentos unen entre sí los puntos medios de los lados del cuadrilátero. Establecido esto, nos preguntamos: ente las proposiciones antes demostradas, ¿no hay alguna en que se hable del paralelismo de los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un polígono? Una de estas proposiciones es el teorema sobre la línea media del triángulo, que dice que el segmento que une los puntos medios de los lados del triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de éste. En la figura que consideramos no hay tales triángulos. Pero no es difícil construirlos, trazando, por ejemplo, la diagonal *BD*. Entonces obtenemos a la vez dos triángulos, *ABD* y *BCD*, en los cuales los segmentos *MQ* y *NP* hacen de líneas medias. Así, $MQ \parallel BD$ y $NP \parallel BD$; por consiguiente, $NP \parallel MQ$. Trazando la segunda diagonal demostraríamos de un

modo análogo que también $MN \parallel PQ$. Sin embargo, esta segunda construcción no es necesaria, ya que del primer par de triángulos tenemos que $MQ = \frac{1}{2}BD$ y $NP = \frac{1}{2}BD$; por lo tanto, $MQ = NP$, es decir, que los lados opuestos MQ y NP del cuadrilátero $MNPQ$ no sólo son paralelos, sino iguales entre sí, de donde se deduce directamente que este cuadrilátero es un paralelogramo.

Como segundo ejemplo tomaremos el conocido teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo. En este caso en el texto del teorema no se incluyen ningunas condiciones especiales y por esto debe escribirse únicamente aquello que hay que demostrar: en el $\triangle ABC$ (fig. 20) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

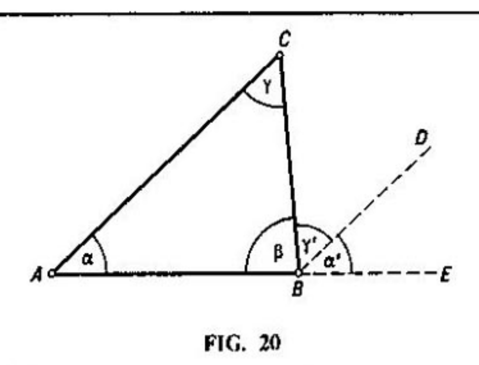


FIG. 20

Del contenido de la proposición que se demuestra vemos que hay que sumar los tres ángulos internos del triángulo. Esta suma conviene hacerla en la misma figura. Construyamos en el vértice B del ángulo β el ángulo $\gamma' = \gamma$. Entonces el lado BD del ángulo γ' será paralelo a AC, en virtud de la igualdad de los ángulos alternos internos adyacentes a la secante BC. Prolongando el lado AB más allá del punto B, obtenemos el $\angle CBE$, que designaremos por α'. $\alpha' = \alpha$ por ser ángulos correspondientes formados por las mismas paralelas y la secante AB. Así, tenemos que $\alpha' + \beta + \gamma' = 180°$, ya que estos ángulos juntos constituyen un ángulo llano. De aquí, en virtud de la igualdad de los ángulos $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$, obtenemos la relación que necesitábamos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

En los ejemplos que hemos puesto se encuentran bastante pronto

las relaciones necesarias. Pero hay casos en los cuales esta relación se establece por medio de toda una serie de proposiciones auxiliares. Entonces el análisis se hace más largo y difícil.

11. Pondremos un ejemplo de análisis más complejo. Hay que demostrar la siguiente proposición (A. P. KISELIOV, Geometría, parte I, pág. 80, problema 13, ed. en ruso): *Si a un triángulo se circunscribe una circunferencia y desde un punto cualquiera de ella se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, sus bases descansan en una recta (recta de Simpson).*

Hagamos el análisis. Sea ABC el triángulo dado (fig. 21), M, el punto de la circunferencia circunscrita, y N, P, Q, las proyecciones respectivas de dicho punto sobre los lados BC, CA y AB del triángulo

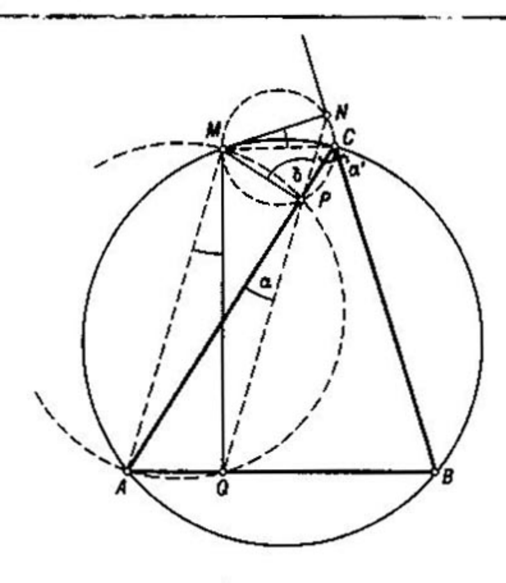


FIG. 21

dado. Hay que demostrar que N, P y Q se encuentran en una misma recta. Al escribir la proposición que hay que demostrar puede tenerse en cuenta que la condición de que los puntos N, P, Q pertenecen a una misma recta equivale a decir que el ángulo NPQ es llano. Así, pues, tenemos:

Se da: $MN \perp BC$, $MP \perp CA$, $MQ \perp AB$; el punto M perteneciente a la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

Hay que demostrar: $\angle NPQ = 180^\circ$.

Observando el ángulo NPQ vemos que está formado por $\angle MPN = \delta$, $\angle MPA = 90^\circ$ y $\angle APQ = \alpha$. La proposición quedaría demostrada si consiguiéramos demostrar que $\angle NPQ = \delta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$. Para esto basta demostrar que $\alpha + \delta = 90^\circ$. Consideremos $\angle CPN = \alpha'$. Como $\angle MPC = 90^\circ$, tenemos que $\alpha' + \delta = 90^\circ$. Si logramos demostrar que $\alpha' = \alpha$, el teorema estará demostrado. La igualdad buscada intentaremos establecerla examinando los nuevos ángulos, para lo cual aprovecharemos las condiciones del teorema. Los ángulos rectos APM y AQM se apoyan en el segmento AM, por esto la circunferencia construida sobre AM como diámetro, pasa por los puntos P y Q. En virtud de las propiedades de los ángulos inscritos, $\angle AMQ = \angle APQ = \alpha$. De un modo semejante, construyendo sobre MC como diámetro una circunferencia, vemos que pasa por P y N y por la propiedad de los ángulos inscritos, $\angle CMN = \angle CPN = \alpha'$. Intentemos ahora demostrar que $\angle AMQ = \angle CMN$. Para esto prestamos atención a que el cuadrilátero $ABCM$ es inscrito y que, por lo tanto, la suma de sus ángulos opuestos es igual a 180°:

$$\left.\begin{aligned} &\angle AMC + \angle B = 180^\circ, \\ &\text{o bien} \\ &\angle AMQ + \angle QMC + \angle B = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Por otra parte, en el cuadrilátero $BQMN$ los ángulos en los puntos Q y N son rectos, por lo que la suma de sus otros dos ángulos es igual a 180°:

$$\left.\begin{aligned} &\angle QMN + \angle B = 180^\circ, \\ &\text{o bien} \\ &\angle QMC + \angle CMN + \angle B = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ingualando las igualdades (1) y (2), obtenemos:

$$\angle QMC + \angle CMN + \angle B = \angle AMQ + \angle QMC + \angle B,$$

de donde

$$\angle CMN = \angle AMQ,$$

es decir, $\alpha' = \alpha$.

De aquí, como ya vimos, se deduce que $\alpha + \delta = 90^\circ$, $\alpha + \delta + 90^\circ = 180^\circ$ y, finalmente, el $\angle NPQ = 180^\circ$.

Si tuviéramos que expresar de una manera consecutiva la marcha de la demostración, nos veríamos obligados a seguir el camino inverso: primeramente demostraríamos que $\angle AMQ = \angle CMN$, después estableceríamos las igualdades

$$\angle AMQ = \angle MQN \text{ y } \angle CMN = \angle CPN.$$

Finalmente, de que $\angle CPA = \angle CPN + \angle MPN + 90° = 180°$ obtendríamos que $\angle NPQ = \angle MPN + 90° + \angle APQ = 180°$, es decir, que los puntos N, P y Q están en una misma recta.

Este caso, inverso al análisis, de exposición de la demostración, que es el que se emplea de ordinario en los libros de texto y en clase al demostrar los teoremas, se llama SÍNTESIS. Exponer la demostración de los teoremas por el método sintético es más fácil y natural, pero no debe olvidarse que para BUSCAR la demostración tenemos que hacer uso inevitablemente del análisis.

Así, el análisis y la síntesis son dos estados, inseparablemente ligados entre sí, de un mismo proceso, la estructuración de la demostración del teorema dado. El análisis es el método para buscar la demostración, la síntesis, el método para exponer la demostración.

Está claro que cuando se busca la demostración de una proposición cualquiera no siempre es fácil hallar la sucesión necesaria de conclusiones. No se consigue siempre emprender de inmediato el camino correcto, y a veces hay que desechar el procedimiento fijado y pasar a otro.

Pondremos un ejemplo. Supongamos que hay que demostrar la proposición siguiente: "Si dos medianas de un triángulo son iguales entre sí, este triángulo es isósceles". Se da el $\triangle ABC$ en el cual las medianas AM y BN son iguales entre sí. Al principio puede parecer conveniente considerar los triángulos ABM y ABN y demostrar que son iguales. Pero no es difícil ver que para esta demostración nos faltan datos: sólo sabemos que $AM = BN$ y que el lado AB es común en estos triángulos. No se da la igualdad de los ángulos ni de los terceros lados. Por esto tenemos que renunciar a este camino. Del mismo modo nos convencemos también de que carece de sentido considerar los triángulos ACM y BCN, ya que tenemos pocos datos para poder demostrar su igualdad. Una vez desechada la consideración de estos triángulos, buscamos un nuevo camino. Designamos por P el punto de intersección de las medianas y consideramos los triángulos ANP y BMP. En virtud de la igualdad de las medianas y de que el punto P se encuentra en el tercio de cada mediana, obtenemos que $PN = PM$, $PA = PB$ y $\angle APN = \angle BPM$ como opuestos por el vértice. Por consiguiente, $\triangle ANP = \triangle BMP$ y $AN = BM$. Y como estos seg-

mentos son las mitades de los lados respectivos, también será $AC = BC$, que es lo que había que demostrar.

La habilidad para hacer el análisis y hallar por sí mismo la demostración se adquiere haciendo muchos ejercicios, para lo cual es necesario resolver sistemáticamente problemas sobre demostraciones.

12. Antes de terminar esta parte, queremos llamar la atención sobre el hecho de que todo teorema puede demostrarse por dos procedimientos: directo e indirecto.

Con LA DEMOSTRACIÓN DIRECTA nos convencemos de la veracidad de la proposición demostrada estableciendo una relación directa entre ella y las demostradas con anterioridad.

Con LA DEMOSTRACIÓN INDIRECTA establecemos que, poniendo en duda la veracidad de la proposición que se demuestra y tomándola por falsa, llegamos a una contradicción con las condiciones o con una proposición ya demostrada. Por esto la demostración indirecta se llama también demostración por REDUCCIÓN AL ABSURDO.

Hasta aquí hemos empleado preferentemente en nuestra exposición la demostración directa. Veamos ahora algunos ejemplos de demostración por reducción al absurdo.

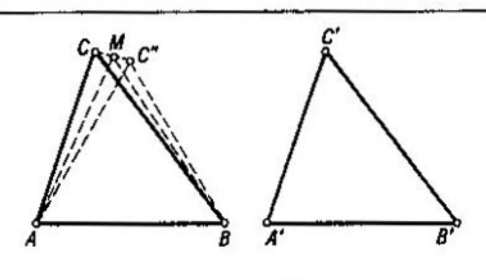


FIG. 22

Como primer ejemplo daremos la demostración del tercer criterio de igualdad de triángulos. En el libro de texto oficial se dice que demostrar este criterio por superposición no es conveniente, ya que nada sabemos acerca de la igualdad de los ángulos. Pero utilizando el método de reducción al absurdo también puede demostrarse este criterio por superposición.

Así, sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos dados (fig. 22), en los cuales $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ y $AB = A'B'$. Para hacer la demostración superponemos el $\triangle A'B'C'$ al $\triangle ABC$, de manera que el lado $A'B'$ coincida con el AB. Como nada sabemos acerca de la igualdad de los ángu-

los, no podemos afirmar que el punto C' coincida con el C. Supongamos por esto que dicho punto ocupa la posición C''. Unamos los puntos C y C''. El $\triangle ACC''$ es isósceles (por la condición de que $AC'' = AC$), el $\triangle BCC''$ también lo es (por la condición de que $BC'' = BC$). La altura AM del triángulo isósceles ACC'' pasa por M, punto medio del lado CC'' (porque en el triángulo isósceles la altura coincide con la mediana). La altura BM del triángulo isósceles BCC'' también pasa por el punto medio M del lado CC''. Así obtenemos que por el punto M pueden trazarse dos perpendiculares, AM y BM, a la recta CC''. Estas perpendiculares no pueden coincidir, ya que esto significaría que los puntos A, B y M pertenecen a una misma recta, lo cual es imposible en virtud de que los puntos C y C'' (y, por consiguiente, todo el segmento) se encuentran a un mismo lado de la recta AB.

Así, hemos llegado a la conclusión de que si se admite que los puntos C y C' no coinciden, resulta que por un mismo punto M pueden trazarse a la recta CC'' dos perpendiculares distintas. Pero esto contradice las propiedades de la perpendicular establecidas con anterioridad. Por lo tanto, al superponer los triángulos, el punto C' debe coincidir con el C obteniéndose que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Como segundo ejemplo tomaremos la demostración de la proposición antes citada de que si dos bisectrices de un triángulo son iguales, el triángulo es isósceles.

Supóngase que tenemos el $\triangle ABC$ y que sus bisectrices son AM y BN (fig. 23).

Escribimos el teorema.

SE DA: en el $\triangle ABC$ $\angle CAM = \angle BAM$; $\angle CBN = \angle ABN$ y $AM = BN$.

HAY QUE DEMOSTRAR: $AC = BC$.

La demostración la hacemos por el método de reducción al absurdo. Supongamos que el triángulo no es isósceles y, para precisar, supongamos también que $AC > BC$. Si esto es así, también será $\angle ABC > \angle CAB$. Numerando los ángulos como muestra la figura, obtenemos que $\angle 3 > \angle 1$. Comparemos ahora el $\triangle ABM$ y el $\triangle ABN$; en ellos AB es común, $AM = BN$ por la condición, y los ángulos comprendidos entre los lados respectivamente iguales, no son iguales. Por lo tanto, enfrente del ángulo mayor se encontrará un lado también mayor, es decir, $AN > BM$. Tracemos ahora por el punto N el segmento ND, igual y paralelo a AM. Entonces el cuadrilátero $AMDN$ será un paralelogramo y, por consiguiente, $MD = AN$ y $\angle 5 = \angle 2$. Uniendo B con D obtenemos el $\triangle BDN$, que será ISÓSCELES, puesto que $ND = AM = BN$. Por otra parte, en el $\triangle BDM$ el lado

$MD = AN$, pero $AN > BM$ y, por lo tanto, $MD > BM$, de donde también es $\angle 7 > \angle 6$. Al mismo tiempo $\angle 4 > \angle 5$, ya que $\angle 5 = \angle 2 = \angle 1$, y $\angle 4 = \angle 3$, pero $\angle 3 > \angle 1$. Si se suma la desigualdad obtenida $\angle 7 > \angle 6$ y $\angle 4 > \angle 5$, obtenemos: $\angle 4 + \angle 7 > \angle 5 + \angle 6$, es decir, $\angle BDN > \angle DBN$. Hemos obtenido, pués, que los ángulos

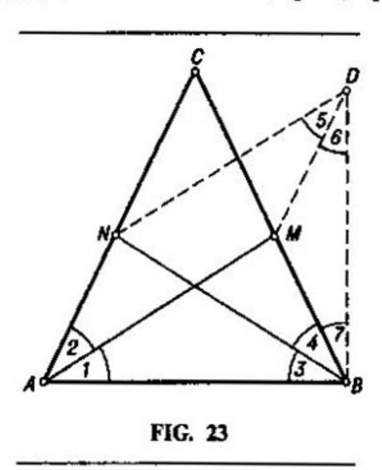


FIG. 23

adyacentes a la base del triángulo ISÓSCELES BDN no son iguales. Esta contradicción hace que renunciemos a la suposición de que $AC > BC$. De un modo análogo podríamos refutar que $BC > AC$. Así, pués, $AC = BC$.

Estos ejemplos esclarecen suficientemente el carácter de las demostraciones por reducción al absurdo. A este tipo de demostraciones suele recurrirse cuando al buscar argumentos se descubre que la demostración directa es difícil y, a veces, imposible de hallar.

En este caso se toma una proposición que contradiga aquella que hay que demostrar y, por medio del análisis, se procura hallar un orden de conclusiones que conduzca a una proposición que se encuentre en clara contradicción con cualquiera de las ya establecidas. A proposiciones claramente contradictorias hemos llegado en los dos últimos ejemplos: en el primero llegamos a la conclusión de que por un punto pueden trazarse dos perpendiculares a una recta, y en el segundo, a que los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles no son iguales entre sí.

§ 4. ¿QUÉ PROPOSICIONES DE LA GEOMETRÍA PUEDEN ADMITIRSE SIN DEMOSTRACIÓN?

1. Respondamos ahora a la última pregunta planteada en la introducción: ¿qué proposiciones de la geometría pueden admitirse sin demostración?

A primera vista esta pregunta parece muy fácil. Cada cual puede decir que sin demostración pueden admitirse los axiomas y como tales pueden tomarse las proposiciones cuya veracidad ha sido demostrada muchas veces y no ofrecen duda alguna. Pero cuando queremos elegir prácticamente las proposiciones correspondientes, nos encontramos con que hacer esto no es tan fácil.

En la actualidad se conoce un número muy grande de proposiciones geométricas que fueron sometidas a comprobación práctica tantas veces, que es poco probable que alguien pueda poner en duda su veracidad. Pero de esto no se deduce, naturalmente, que todas estas proposiciones tengan que ser admitidas como axiomas. Para nosotros es indudable, por ejemplo, que por dos puntos no puede trazarse nada más que una recta; que por un punto dado puede trazarse a una recta una, y solamente una, perpendicular; que la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado; que dos segmentos iguales a un mismo tercer segmento, son iguales entre sí; que la distancia entre dos líneas paralelas es igual en todas partes, etc. Está claro que el número de estas proposiciones podría aumentarse en muchas veces. ¿Por qué todas estas proposiciones no se admiten como axiomas? De hacer así se simplificaría mucho la exposición de la geometría, muchas demostraciones serían innecesarias, etc.

Pero el desarrollo de la geometría no ha seguido este camino; al contrario, los geómetras han procurado reducir al mínimo el número de axiomas y todo el restante contenido de la geometría se infiere, por vía deductiva, de este pequeño número de verdades fundamentales.

¿Por qué se eligió precisamente este camino, más difícil y complejo al parecer, para construir el sistema de conocimientos geométricos?

La tendencia a construir la geometría a partir del menor número posible de axiomas se debe a toda una serie de causas. En primer lugar, al disminuir el número de axiomas aumenta, naturalmente, la importancia de cada uno de ellos por separado, ya que no puede olvidarse que estos axiomas deben encerrar en sí toda la futura geometría, que debe deducirse de ellos. Por esto, cuanto menor sea el número de

axiomas, tanto más generales, profundas e importantes serán las propiedades de las formas espaciales que ponga de manifiesto cada axioma de por sí.

Otra causa importante, que obliga a reducir en lo posible el número de axiomas, es la circunstancia de que cuanto menor sea dicho número, tanto más fácil será comprobar su veracidad y seguir el cumplimiento de aquellas condiciones que se imponen al conjunto de los axiomas (de ellas hablaremos más adelante).

2. Así, pues, se nos plantea el problema de elegir el número menor posible de proposiciones fundamentales, más generales e importantes, de la geometría que admitiremos como axiomas. ¿Qué debe servirnos de guía en esta elección? En primer lugar debemos tener en cuenta que esta selección no puede hacerse por orden, analizando un axioma tras otro, sin relacionarlos con otros axiomas. Debemos admitir no un axioma aislado, sino *todo un sistema de axiomas* ,ya que sólo este sistema puede reflejar correctamente las propiedades realmente existentes y la relación mutua de las principales formas espaciales del mundo material.

Es natural que en este sistema pueden incluirse solamente verdades comprobadas muchas veces que reflejen las leyes más generales y básicas de las formas espaciales.

Una vez aceptado el sistema de axiomas, debemos prestar atención a que no entren en él proposiciones que se contradigan entre sí, ya que estas proposiciones no podrán ser verdaderas al mismo tiempo. No puede permitirse, por ejemplo, que en el sistema figuren a la vez los axiomas siguientes: "Por un punto no perteneciente a una recta se puede trazar una, y solamente una, paralela a la recta" y "Por un punto exterior a una recta dada no se le puede trazar a la recta ninguna paralela".

Además, los axiomas no sólo no deben contadecirse unos a otros, sino que también entre las consecuencias de ellos no debe haber dos proposiciones que se contradigan entre sí. Esta condición principal que se impone al sistema de axiomas se llama *condición de no contradicción.*

Pero a la vez que a la condición de no contradicción debe prestarse atención a que en nuestro sistema de axiomas no figure ninguna proposición que pueda ser demostrada apoyándose en los demás axiomas. Esta exigencia se comprenderá perfectamente si se recuerda que queremos hacer que nuestro sistema sea mínimo, es decir, que contenga el número menor posible de proposiciones sin demostración. Si una proposición dada puede demostrarse apoyándose en otros axiomas, ya no será un axioma, sino un teorema, y no habrá necesidad

de incluirla en el sistema de axiomas. La exigencia de que el axioma sea indemostrable por medio de otros axiomas se llama *condición de independencia.*

Sin embargo, cuando tendemos a hacer nuestro sistema de axiomas lo menor posible, no debemos caer en extremismos y eliminar de él aquellas proposiciones en las cuales tengamos que apoyarnos necesariamente al exponer la geometría.

En esto consiste la tercera condición que debe satisfacer el sistema de axiomas, es decir, *la condición de que el sistema sea completo.* Más exactamente esta condición se puede enunciar así: si el sistema es *incompleto*, siempre se le podrá añadir una nueva proposición (que contenga, claro está, los mismos conceptos fundamentales que los demás axiomas) que no dependerá del resto de los teoremas y que no los contradecirá. Pero si el sistema es *completo*, toda nueva proposición añadida a él y que contenga los mismos conceptos a que se refieren los axiomas, será consecuencia de estos axiomas o los contradecirá.

3. Para que sea más fácil figurarse las condiciones de integridad, independencia y no contradicción que debe reunir el sistema de axiomas, puede ponerse un ejemplo sencillo, que, aunque no es reflejo exacto de las relaciones geométricas, tiene una buena analogía con ellas.

Sea un sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. A cada una de las incógnitas del sistema vamos a considerarla como un "concepto" determinado que requiere ser definido, y a cada ecuación, como una especie de "axioma" por medio del cual se establecen relaciones entre estos "conceptos".

Supongamos, pues, que tenemos el sistema

$$2x - y - 2z = 3,$$

$$x + y + 4z = 6.$$

Con este sistema, ¿pueden determinarse las incógnitas x, y, z? No, porque el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. El sistema no satisface *la condición de ser completo.*

Hacemos la prueba de corregirlo añadiéndole una ecuación más:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3\ , \\ x + y + 4z &= 6\ , \\ 3x + 3y + 12z &= 18. \end{aligned}$$

Observando atentamente el sistema obtenido nos convencemos de que la introducción de la ecuación nueva no ha cambiado las cosas, porque la tercera ecuación es una simple consecuencia de la segunda

y no reporta ninguna relación nueva. El sistema no cumple *la condición de independencia.*

Cambiemos ahora la tercera ecuación y examinemos el sistema siguiente:

$$2x - y - 2z = 3,$$
$$x + y + 4z = 6,$$
$$3x + 3y + 12z = 15.$$

Volvemos a convencernos de que este sistema tampoco sirve para determinar las incógnitas.

En efecto, dividiendo por 3 los dos miembros de la última ecuación, obtenemos:

$$x + y + 4z = 5.$$

La segunda ecuación nos da:

$$x + y + 4z = 6.$$

¿Cuál de estas dos ecuaciones puede creerse? Está claro que se trata de un sistema *contradictorio,* del cual no pueden deducirse tampoco las incógnitas.

Si, finalmente, examinamos el sistema

$$2x - y - 2z = 3,$$
$$x + y + 4z = 6,$$
$$2x + y + 5z = 8,$$

es fácil convencerse de que el sistema tiene una solución única ($x = 5$, $y = 13$ y $z = -3$), es decir, es un sistema no contradictorio, independiente y completo. Si a este sistema se le añade una cuarta ecuación, que relacione entre sí x, y, z, esta última será consecuencia de las tres ecuaciones dadas o las contradecirá.

4. De aquí puede verse que la elección de los axiomas que deben constituir la base de la geometría dista mucho de ser arbitraria y que está sometida a exigencias muy serias. El trabajo para establecer el sistema necesario de axiomas de geometría se comenzó ya a finales del siglo pasado y, aunque en esta dirección han hecho mucho los científicos, todavía no puede decirse que esté definitivamente acabado. El caso es que, sometiendo el sistema de axiomas existente a una revisión sistemática, los científicos descubren de vez en cuando que en este sistema sobran axiomas, es decir, hay axiomas "dependientes" que son consecuencia de otros más simples y generales, por esto las proposiciones complejas que contienen un número considerable de condiciones, se sustituyen por axiomas con un número menor de condiciones

y así sucesivamente. Todas estas investigaciones tienen gran interés para la ciencia, ya que están orientadas a esclarecer qué propiedades más generales, profundas e importantes de las figuras espaciales determinan todo el contenido de la geometría.

Para dar cierta idea del sistema de axiomas de la geometría moderna nos referiremos primeramente a la exposición de la geometría que se hace en la escuela y veremos sobre qué axiomas se estructura y qué axiomas le faltan. Al hacer esto nos limitaremos a los axiomas de la planimetría.

La exposición del curso de geometría empieza en la escuela por la explicación de los primeros conceptos: cuerpo, superficie, línea y punto. Después, de entre todas las líneas se destaca la recta, y de entre todas las superficies, el plano. Los primeros axiomas del curso escolar establecen las relaciones entre el punto, la recta y el plano. Estos axiomas pertenecen al grupo de los *axiomas de combinación*, que es el primer grupo del sistema completo de axiomas de la geometría.

Los axiomas de este grupo establecen cómo se "combinan" entre sí las principales imágenes geométricas: por cuántos puntos se determinan la recta y el plano, qué condiciones son necesarias para que una recta pertenezca a un plano, etc.

Del grupo de los axiomas de combinación, en el curso escolar sólo se mencionan dos:

1) *Por dos puntos puede trazarse una, y solamente una, recta.*

2) *Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, toda la recta pertenece también al plano.*

Al mismo tiempo, consciente o inconscientemente, solemos emplear también otros axiomas de combinación, de los cuales son necesarios para fundamentar la planimetría los siguientes:

3) *En cada recta hay por lo menos dos puntos.* Este axioma, como puede verse, contiene una exigencia muy limitada. Sin embargo, más adelante podrá demostrarse, valiéndose de los axiomas de orden, la existencia de una cantidad innumerable de puntos en la recta.

4) *En un plano existen por lo menos tres puntos que no se encuentran en una misma línea recta.* Este axioma también contiene una exigencia mínima, basándose en la cual podrá demostrarse luego que existe una cantidad innumerable de puntos en el plano.

5. Pasamos al segundo grupo de axiomas, totalmente ausente en el curso escolar, aunque a cada paso hay que emplearlos. Los axiomas de este grupo se llaman *axiomas de orden*. En estos axiomas se describen las leyes a que se subordina la posición mutua de los puntos en la recta y la posición mutua de los puntos y las rectas en el plano. Estos axiomas los empleamos frecuentemente aunque de forma no clara. Si,

por ejemplo, necesitamos prolongar un segmento, lo hacemos, porque sabemos que un segmento siempre se puede prolongar en uno y otro sentido.

Si unimos dos puntos que se encuentran a distintos lados de una recta, estamos seguros de que el segmento obtenido cortará a dicha recta. En esto nos apoyamos, por ejemplo, al demostrar el teorema de la igualdad de los triángulos si tienen iguales dos de sus lados y el ángulo que se encuentra enfrente de uno de estos lados (véase la fig. 12). Otro ejemplo: estamos seguros de que la bisectriz del ángulo interno de un triángulo corta necesariamente el lado opuesto.

Es indiscutible que en todos estos casos nos encontramos con hechos muy evidentes, pero precisamente ellos nos indican que existen ciertas propiedades fundamentales de las figuras geométricas, que utilizamos constantemente y que por lo tanto hay que dar a conocer como axiomas.

Los axiomas que definen la posición de los puntos en la recta están ligados a los conceptos fundamentales de "anteceder" y "suceder" y se enuncian así:

1) *De dos puntos que se encuentran en una misma recta, cualquiera de ellos puede tomarse como antecedente, entonces el segundo será consecuente.*

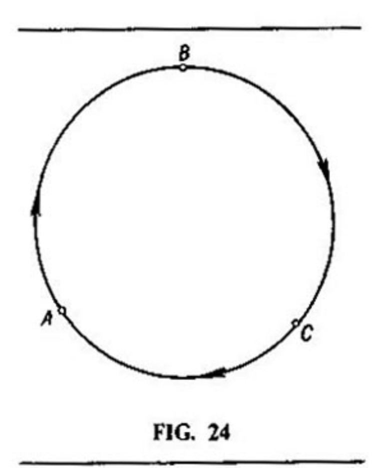


FIG. 24

2) *Si A, B, C son puntos de una misma recta y A antecede a B y B antecede a C, A precede también a C.*

Estos dos axiomas ponen ya claramente de manifiesto las propiedades características de la recta, que no son propias de todas las lí-

neas. Tomemos, por ejemplo, una circunferencia (fig. 24) y siguiéndola en la dirección del movimiento de las agujas del reloj, pongamos sucesivamente los puntos A, B, C; entonces nos convencemos de que en la circunferencia el punto A antecede al B, el punto B antecede al C, y el punto C antecede al A. Con la disposición antes indicada de los puntos A, B y C en la recta, decimos que B se encuentra *entre* A y C (fig. 25).

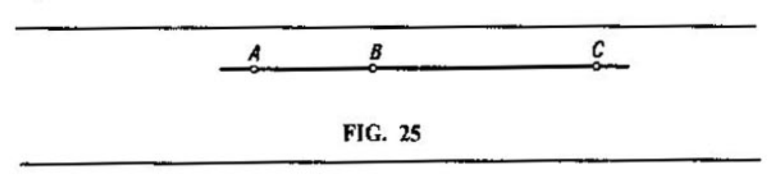


FIG. 25

3) *Entre cada dos puntos de una recta existe siempre otro punto de la misma recta.*

Aplicando sucesivamente este axioma a dos puntos de una recta (que existen en virtud del segundo axioma de combinación), después a cada uno de los intervalos obtenidos y así sucesivamente, obtenemos que entre cada dos puntos de una recta existe una cantidad innumerable de puntos de esta misma recta.

La parte de recta a la cual pertenecen dos puntos y todos los puntos intermedios entre ellos, se llama *segmento.*

4) *Para cada punto de una recta existe tanto un punto precedente como un punto consecuente.*

De este axioma se infiere la posibilidad de prolongar un segmento de recta en uno y otro sentido. De aquí se deduce también que en una recta no hay punto que preceda a todos sus demás puntos o siga a todos los puntos restantes, es decir, que *la recta no tiene extremos.*

La parte de una recta que contiene un punto dado y todos los que le anteceden o un punto dado y todos los que le siguen, se llama *rayo* o *semirecta.*

La posición mutua de los puntos y rectas en el plano se determina por el siguiente axioma, llamado "axioma de Pasch", en recuerdo del matemático alemán que lo enunció por vez primera:

5) *Dados tres puntos que no estén en una misma recta, toda recta del mismo plano que no pase por estos puntos y que corte uno de los segmentos determinados por ellos, cortará además a uno, y solamente uno, de los otros segmentos* (*fig.* 26).

Valiéndose de este axioma se demuestra el teorema de la división del plano por la recta en dos semiplanos. Damos la demostración de este teorema como ejemplo de demostración rigurosa, apoyada sola-

mente en un axioma y en proposiciones ya demostradas. El teorema lo enunciaremos del modo siguiente.

Toda recta que pase por un plano divide todos los puntos del plano, no pertenecientes a ella, en dos clases, de tal modo, que dos puntos de una misma clase determinan un segmento que no corta a la recta, y dos puntos de clases distintas determinan un segmento que corta a la recta.

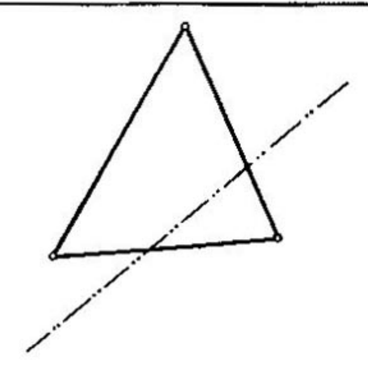


FIG. 26

Al hacer esta demostración emplearemos, para simplificar la escritura, ciertos signos especiales que es necesario recordar.

El signo $\subset$ significa *pertenencia*: $\overline{A \subset a}$, "el punto *A* pertenece a la recta *a*". El $\times$ significa *intersección*: AB $\times$ *a*, "el segmento *AB* corta a la recta *a*". Una raya trazada horizontalmente sobre una correlación significa su *negación*: A $\subset$ *a*, "el punto *A no* pertenece a la recta *a*". El signo $\therefore$ significa *conclusión*, "por lo tanto ...". Establecido esto pasamos a demostrar el teorema. Ante todo advertimos que *si tres puntos están en una misma recta, para ellos se cumple una proposición análoga al axioma de Pasch: una recta que corte a uno de los tres segmentos determinados por estos puntos, cortará además a uno, y solamente uno, de los otros segmentos.* Esta proposición es fácil de demostrar apoyándose en el axioma de la distribución de los puntos en la recta.

En efecto, si los puntos *A*, *B*, *C* están en una misma recta y el punto *B* se encuentra entre *A* y *C*, todos los puntos de los segmentos *AB* y *BC* pertenecen al segmento *AC*, y cada punto del segmento *AC* (excluido *B*) pertenecen a *AB* o a *BC*. Por lo tanto, una recta que corte a *AB* o a *BC* cortará también necesariamente a *AC*, y una recta que corte a *AC* cortará también a *AB* o a *BC*.

Supongamos ahora que en un plano tenemos una recta *l*. Hay que demostrar lo siguiente:

1) Valiéndose de la recta *l*, los puntos del plano no pertenecientes a esta recta pueden dividirse en clases.

2) Las clases pueden ser dos y solamente dos.

3) Las clases poseen las propiedades que se indican en el teorema.

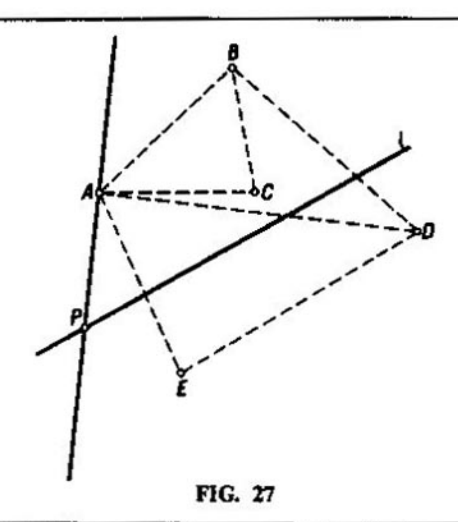


FIG. 27

Para establecer esto, fuera de la recta *l* tomamos un punto *A* (fig. 27) y admitimos las siguientes condiciones:

a) el punto *A* pertenece a la *primera* clase (que designaremos por K_1);

b) un punto no perteneciente a *l* será de la *primera* clase, si dicho punto determina con el punto *A* un segmento que no corte a *l*;

c) un punto no perteneciente a *l* será de la *segunda* clase (que designaremos por K_2), si determina con el punto *A* un segmento que corte a *l*.

Es fácil convencerse de que existen puntos de una y otra clase. Para esto tomamos en la recta *l* el punto *P* y trazamos la recta *PA*. El rayo con vértice en *P*, que contiene al punto *A*, sólo contiene puntos de la primera clase, ya que el punto de intersección *P* se encuentra fuera de los segmentos determinados por el punto *A* y los demás puntos del rayo. El rayo opuesto con el mismo vértice sólo contiene puntos de la segunda clase, porque el punto de intersección *P* está dentro de to-

dos los segmentos determinados por el punto A y por los puntos de este rayo. Uniendo A con cualquier punto de la recta l obtenemos una cantidad innumerable de rectas que contienen puntos de la primera y de la segunda clase.

Clases *sólo* puede haber *dos*, ya que con respecto a cualquier segmento que una A con un punto no perteneciente a l podemos hacer *sólo dos* proposiciones: el segmento corta a l, o no la corta, una tercera es imposible.

Demostremos finalmente que las clases K_1 y K_2 satisfacen las condiciones del teorema. Veamos los siguientes casos:

1) Ambos puntos pertenecen a la primera clase: $B \subset K_1$ y $C \subset K_1$. Como $B \subset K_1$, $\overline{AB \times l}$, y como $C \subset K_1$, $\overline{AC \times l}$. $\therefore$ basándose en el axioma de Pasch, $\overline{BC \times l}$.

2) Ambos puntos pertenecen a la segunda clase: $D \subset K_2$ y $E \subset K_2$. Como $D \subset K_2$, $AD \times l$, y como $E \subset K_2$, $AE \times l$. $\therefore$ basándose en el axioma de Pasch $\overline{DE \times l}$.

3) Los puntos pertenecen a clases distintas: $B \subset K_1$ y $D \subset K_2$. Como $B \subset K_1$, $\overline{AB \times l}$, y como $D \subset K_2$, $AD \times l$. $\therefore$ basándose en el axioma de Pasch, $BD \times l$.

El teorema queda demostrado.

La parte de un plano que contiene todos los puntos de una misma clase se llama *semiplano*.

Advertimos que la demostración de este teorema podía haberse hecho sin utilizar en absoluto el dibujo. Este último sólo ayuda a seguir la marcha de los razonamientos y a retener en la memoria las correlaciones obtenidas. Por otra parte, esta advertencia puede referirse a cualquier demostración suficientemente rigurosa.

6. El siguiente, tercer grupo de axiomas de la geometría está relacionado con el concepto de *igualdad*. En el curso escolar de geometría, la igualdad de las figuras en el plano se establece por medio de la superposición de una figura a otra.

El libro de texto oficial de geometría, acerca de esta cuestión, dice lo siguiente: "Las figuras geométricas pueden trasladarse en el espacio sin sufrir ninguna variación. Dos figuras geométricas se llaman iguales, si trasladada una de ellas en el espacio puede hacerse coincidir con la segunda de tal modo, que ambas figuras coincidan en todas sus partes".

A primera vista esta definición de igualdad parece totalmente comprensible, pero si se analiza atentamente no es difícil descubrir en ella un círculo vicioso. En efecto, para determinar la igualdad de las figuras tenemos que hacerlas coincidir una con otra, y para hacerlas coincidir tenemos que *trasladar* una figura en el espacio, permanecien-

do ésta *invariable* durante el proceso del traslado. Pero, ¿qué significa "permanecer invariable"? Esto quiere decir que la figura, durante todo el tiempo, sigue siendo igual a cierta imagen inicial suya. Así resulta que el concepto de "igualdad" lo determinamos por medio del traslado de una "figura invariable", y el concepto de "figura invariable", por medio del concepto de "igualdad".

Por esto es mucho más racional basar la igualdad de las figuras en un grupo de axiomas referentes a la igualdad de los segmentos, ángulos y triángulos.

Los axiomas que establecen las propiedades de la igualdad de los segmentos son los siguientes:

1) *En una recta dada, en un sentido dado y a partir de un punto también dado puede tomarse un segmento, y solamente uno, igual a un segmento dado.*

2) *Cada segmento es igual a sí mismo. Si el primer segmento es igual al segundo, el segundo es igual al primero. Dos segmentos iguales a un mismo tercer segmento son también iguales entre sí.*

3) *Si A, B y C están en una misma recta, A', B' y C' también están en una misma recta y si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, será también $AC = A'C'$.*

En otras palabras, si a segmentos iguales se añaden otros segmentos iguales, las sumas también serán iguales.

Axiomas totalmente iguales se cumplen en los ángulos.

4) *Sobre un rayo dado, en un semiplano también dado, puede construirse un ángulo, y solamente uno, igual al dado.*

5) *Cada ángulo es igual a sí mismo. Si el primer ángulo es igual al segundo, el segundo es igual al primero. Si dos ángulos son iguales a un mismo tercero, son también iguales entre sí.*

6) *Si a, b, c son unos rayos con vértice común, a', b', c' son otros rayos con vértice común y $\angle ab = \angle a'b'$ y $\angle bc = \angle b'c'$, será tambien $\angle ac = \angle a'c'$.*

En otras palabras, si a ángulos iguales se añaden ángulos iguales, las sumas también serán iguales.

Finalmente, para fundamentar la igualdad de triángulos se introduce un axioma más al tercer grupo.

7) *Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de un triángulo son iguales respectivamente a dos lados y al ángulo comprendido entre ellos de otro triángulo, en estos triángulos también son respectivamente iguales los otros ángulos.* Por ejemplo, si tenemos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ y en ellos $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $\angle A = \angle A'$, serán también $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

Basándose en estos siete axiomas se demuestran primero los principales criterios de igualdad de los triángulos y después todos los teo-

remas sobre la igualdad de las figuras que en ellos se fundan. Con esto ya no hay que utilizar en ninguna parte el procedimiento de superposición, puesto que es innecesario.

Veamos, por ejemplo, cómo se demuestra el primer criterio de la igualdad de triángulos.

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ (fig. 28) los triángulos dados, en los cuales $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $\angle A = \angle A'$. Hay que demostrar que todos

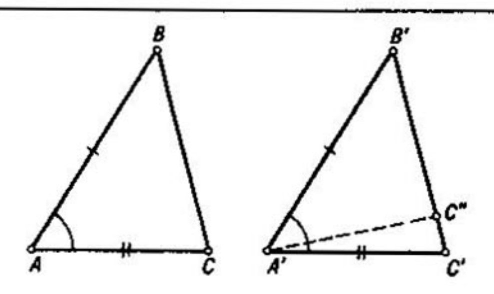


FIG. 28

los demás elementos de estos triángulos son también iguales. Por el axioma 7 obtenemos inmediatamente que $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$. Nos queda por demostrar que también $BC = B'C'$. Supongamos que $BC \neq B'C'$. Entonces, sobre el lado $B'C'$ y a partir del punto B' tomamos el segmento $B'C'' = BC$. Consideremos ΔABC y $\Delta A'B'C''$. En ellos $AB = A'B'$, $BC = B'C''$ y $\angle B = \angle B'$. Entonces, por el axioma 7, también $\angle B'A'C'' = \angle A$. Pero dos ángulos iguales a un mismo tercero son también iguales entre sí, por lo tanto $\angle B'A'C'' = \angle B'A'C'$. Hemos obtenido que sobre el rayo $A'B'$, en un mismo semiplano, se han construido dos ángulos diferentes iguales a un mismo ángulo A, lo que contradice al axioma 4. Así, renunciando a la proposición $BC \neq B'C'$, obtenemos que $BC = B'C'$.

De un modo semejante se demuestran los demás teoremas sobre la igualdad de las figuras.

7. Más adelante la exposición de la geometría elemental se encuentra con la necesidad de tener que introducir un grupo más de axiomas, el de los llamados *axiomas de continuidad*. Los problemas de intersección de una recta con una circunferencia y de intersección de circunferencias entre sí están relacionados íntimamente con este grupo de axiomas. Todas las construcciones geométricas hechas con compás y regla se apoyan precisamente en estos problemas. Este hecho mues-

tra la importancia extraordinariamente grande de los axiomas de continuidad. Además, sobre estos axiomas se ha construido toda la teoría de la medición de las magnitudes geométricas.

El grupo de axiomas de continuidad contiene los siguientes axiomas:

1) AXIOMA DE ARQUÍMEDES. *Si se dan dos segmentos de los cuales el primero es mayor que el segundo, repitiendo el segmento menor como sumando un número de veces suficientemente grande, siempre podemos obtener una suma que supere al segmento mayor.* Resumiendo, si a y $\bar{b}$ son dos segmentos y $\bar{a} > \bar{b}$, *existe un número entero n* que hace que $n\bar{b} > \bar{a}$.

El axioma de Arquímedes figura en el libro de texto oficial en el capítulo dedicado a la medición de segmentos. El procedimiento para buscar la medida común de dos segmentos por trazados sucesivos del menor, que mencionamos antes, se apoya en el axioma de Arquímedes. En efecto, por este procedimiento el segmento menor se lleva sobre el mayor y el axioma de Arquímedes nos da la seguridad de que haciendo trazados sucesivos de aquél, la suma de los segmentos menores acabará superando al segmento mayor.

Directamente del axioma de Arquímedes llegamos a la conclusión de que si el segmento $\bar{a}$ es mayor que el segmento b, siempre existe un número entero n que hace que $\frac{\bar{a}}{n} < \bar{b}$.

El segundo axioma de continuidad se llama AXIOMA DE CANTOR O AXIOMA DE ENCAJE, cuyo enunciado es:

2) *Si se tiene un sistema de segmentos en el cual cada consecuente está dentro del que le antecede y si en este sistema siempre puede encontrarse un segmento menor que cualquier segmento dado, existe un punto único que se halla dentro de todos estos segmentos.*

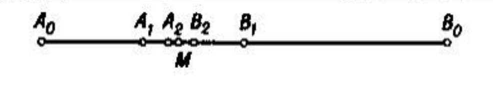


FIG. 29

Para hacer una demostración de cómo se aplica el axioma de Cantor veamos el siguiente ejemplo. Tomamos el segmento A_0B_0 (fig. 29) cuyo punto medio llamaremos B_1 y hallamos el punto medio del segmento A_0B_1, que llamaremos A_1. Después tomamos el punto medio de A_1B_1, al cual le llamaremos B_2 y hallamos el punto medio del seg-

mento A_1B_2, que designaremos por A_2. Luego tomamos el punto medio de A_2B_2, que designaremos por B_3 y buscaremos el punto medio de A_2B_3, al cual le llamaremos A_3. Después tomaremos el punto medio de A_3B_3 y así sucesivamente [1]. Los segmentos A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... etc., son un sistema de segmentos encajados. En efecto, cada segmento consecuente se halla dentro del que le antecede y es igual a $\frac{1}{4}$ de éste. Por lo tanto, la longitud del segmento A_1B_1 es igual a $\frac{1}{4}$ A_0B_0, la longitud de $A_2B_2 = \frac{1}{16} A_0B_0$, $A_3B_3 = \frac{1}{64} A_0B_0$, ..., y en general $A_nB_n = \frac{A_0B_0}{4^n}$.

Del axioma de Arquímedes se deduce que la longitud obtenida $\frac{A_0B_0}{4^n}$, cuando n es suficientemente grande, puede llegar a ser menor que cualquier segmento dado. De este modo, todas las condiciones del axioma se cumplen y existe un punto único que se encuentra dentro de todo el sistema dado de segmentos. Este punto no es difícil de señalar. En efecto, si se toma el punto M a $\frac{1}{3}$ del segmento A_0B_0, es decir, de modo que $A_0M = \frac{1}{3} A_0B_0$, este punto será el buscado. Efectivamente, si el punto A_0 se toma como origen de referencia del eje numérico y el segmento A_0B_0 se acepta como unidad, a los puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n corresponderán respectivamente los valores numéricos

$$\frac{1}{4};\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16};\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}=\frac{21}{64};\ \ldots;$$

$$\frac{1+4+4^2+\ \ldots\ +4^{n-1}}{4^n}.$$

Cada uno de estos quebrados es menor que $\frac{1}{3}$.

En efecto, si al denominador de cada uno de estos quebrados se le

[1] El segmento A_3B_3 no cabe ya en el dibujo, hay que imaginárselo.

resta una unidad, el quebrado aumenta y se hace igual a $\frac{1}{3}$ precisamente:

$$\frac{1+4+4^2+\ \dots\ +4^{n-1}}{4^n-1}=\frac{1+4+4^2+\ \dots\ +4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\ \dots\ +4^{n-1})}=$$
$$=\frac{1}{3}\,^{1)}.$$

Por otra parte, a los puntos B_1, B_2, B_3, ..., B_n corresponde respectivamente los valores numéricos

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32};\ \dots;$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\ \dots\ -\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

El valor numérico correspondiente al punto B_1 puede escribirse también de la forma:

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)-\ \dots\ -\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\ \dots\ -\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Si se suman estos números obtenemos:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ \dots\ -2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}}.$$

De aquí no es difícil obtener que cada uno de los valores numéricos, correspondientes a los puntos B_1, B_2, ..., B_n, es *mayor* que $\frac{1}{3}$. Aumentando el denominador del quebrado en una unidad, disminuimos el

[1] En este caso utilizamos la fórmula

$$a_n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ \dots\ +ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

quebrado y obtenemos:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ \dots\ -2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}+1}=$$

$$=\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ \dots\ -2^3+2^2-2+1}{(2+1)(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ \dots\ -2^3+2^2-2+1}=\frac{1}{3}\,[1].$$

Así, todos los valores numéricos correspondientes a los puntos B_1, B_2, B_3, ...,B_n, ..., son mayores que $\frac{1}{3}$. De esto se deduce que el punto M, al cual corresponde el valor numérico $\frac{1}{3}$, se halla dentro de cada uno de los segmentos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n ... Por lo tanto este es el único punto determinado por la sucesión de estos segmentos.

Pasemos ahora a la demostración del teorema fundamental de la intersección de una recta con una circunferencia.

Recordaremos que una circunferencia se determina por su centro y su radio. Los puntos del plano que se encuentran a una distancia del centro menor que el radio, se llaman *internos* con respecto a la circunferencia, y los que se hallan a una distancia del centro mayor que el radio, se llaman *externos* con respecto a la circunferencia. El teorema fundamental se enuncia así:

Un segmento que una un punto interno, con respecto a la circunferencia, con otro externo, tendra con la circunferencia un punto común, y solamente uno.

Supongamos que se nos da una circunferencia con centro O y radio r, A es el punto interno ($OA < r$), y B es el punto externo ($OB > r$) (fig. 30). Demostraremos ante todo que si en AB existe un punto M, cuya distancia respecto de O es igual al radio, este punto será único. En efecto, si el punto M existe, existirá también el punto M', simétrico al M con respecto a la perpendicular bajada desde O a la recta AB, siendo $M'O = MO = r$. Por la propiedad de las oblicuas trazadas desde un punto a la recta AB, todos los puntos internos del segmento $M'M$ serán también puntos internos de la circunferencia, y los puntos externos del segmento $M'M$ serán también puntos externos de la circunferencia. Por esto el punto A deberá estar siempre entre los puntos M' y M, y en el segmento AB podrá haber solamente un punto M.

[1] En este caso utilizamos la fórmula

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ \dots\ -ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

Una vez establecido esto, dividimos el segmento AB por la mitad y comparamos con el radio la distancia desde el punto obtenido hasta el centro. Si esta distancia resulta ser igual al radio, el teorema estará demostrado. Si dicha distancia es menor que el radio, el punto será interno y le llamaremos A_1. Si la distancia es mayor que el radio, el punto será externo y le llamaremos B_1.

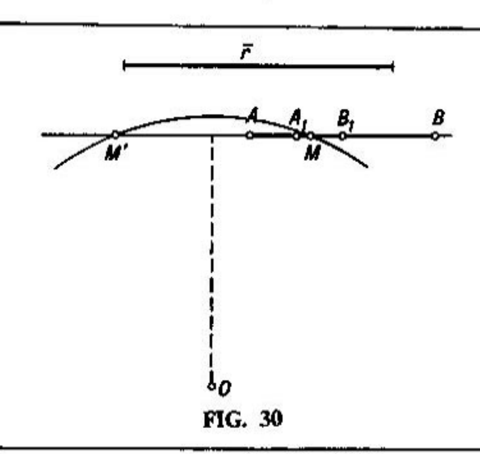


FIG. 30

Después tomaremos el punto medio del segmento A_1B (o AB_1), con respecto al cual también serán posibles tres casos: la distancia desde él hasta el centro es igual al radio, y entonces el teorema estará demostrado, o será menor que el radio, y entonces designaremos este punto por A con el número correspondiente como subíndice, o será mayor que el radio, en cuyo caso lo designaremos por B con el número correspondiente como subíndice. Prosiguiendo ilimitadamente este proceso, obtenemos que o bien la distancia desde el centro hasta uno de estos puntos será igual al radio, y entonces el teorema estará demostrado, o bien todos los puntos designados por las letras A_1, A_2, ..., A_n, ... serán internos y los designados por las letras B_1, B_2, ..., B_n, ... serán externos. Pero en este último caso obtenemos un sistema de segmentos que satisfacen las condiciones del axioma de Cantor, ya que cada segmento consecuente se encuentra dentro del que le antecede y la longitud de cada consecuente es dos veces menor que la longitud de su antecedente. Por lo tanto, existe un punto único situado dentro de todos estos segmentos. Como este punto se encuentra entre todos los puntos internos y todos los externos del segmento, no podrá ser ni interno ni externo; por consiguiente será un punto de la circunferencia.

De este teorema se deduce en particular que si la distancia desde el centro de la circunferencia a una recta es menor que el radio, esta recta tiene con la circunferencia dos, y solamente dos, puntos comunes. En efecto, sea O el centro y r el radio de la circunferencia (fig. 31). La distancia OP desde el centro hasta la recta l es menor que el radio; por

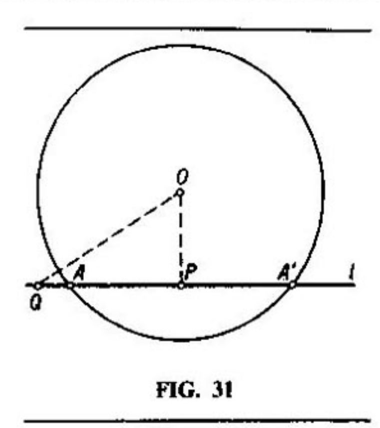


FIG. 31

consiguiente, P es un punto interno. Tomemos sobre la recta l, a partir del punto P, el segmento $PQ = r$.

Como en el triángulo rectángulo OPQ la hipotenusa OQ es mayor que el cateto $PQ = r$, tenemos que $OQ > r$ y, por lo tanto, Q es un punto externo. Por el teorema antes demostrado, el segmento PQ tiene con la circunferencia un único punto común A. El segundo punto común A' es simétrico al A con respecto a la perpendicular OP. Como todos los puntos internos del segmento AA' son también puntos internos de la circunferencia y todos los puntos externos son externos con respecto a la misma, la recta l no tiene otros puntos comunes con la circunferencia.

Proposiciones análogas a los axiomas de Arquímedes y de Cantor pueden demostrarse para arcos de circunferencia, es decir, puede demostrarse que:

1) *Repitiendo un arco dado como sumando un número de veces suficientemente grande, podemos obtener un arco mayor que cualquier arco dado previamente.*

2) *Si se tiene un sistema de arcos en el cual cada arco consecuente se halla dentro del anterior y si en dicho sistema puede encontrarse siempre un arco menor que cualquier arco dado, existe un punto que está dentro de todos estos arcos.*

Apoyándose en estas proposiciones es fácil demostar el teorema fundamental de la intersección de las circunferencias:

Si A es un punto interno y B un punto externo con respecto a una circunferencia dada, el arco de cualguier otra circunferencia que una A y B tendrá con la circunferencia dada un punto común, y solamente uno.

La demostración de este teorema es completamente análoga a la del teorema de la intersección de la circunferencia con el segmento.

8. El quinto y último grupo de axiomas de la geometría está relacionado con el concepto de *paralelismo* y consta de un solo axioma:

Por un punto no perteneciente a una recta dada se puede trazar a esta recta una, y solamente una, recta paralela.

Las proposiciones que se apoyan en este axioma son de todos conocidas y no vamos a detenernos en ellas.

El sistema de axiomas que hemos examinado da una idea suficiente del conjunto de las proposiciones sin demostración que pueden servir de base a la geometría. Conviene, sin embargo, advertir que al tender a simplificar en lo posible la exposición, no hemos tratado de hacer mínimo por su cantidad este sistema. El número de estos axiomas podría disminuirse aún más. Por ejemplo, los dos axiomas de Arquímedes y de Cantor se podrían sustituir por uno, llamado axioma de Dedekind. Podrían hacerse menos rigurosas las exigencias contenidas en los axiomas. Por ejemplo, en el axioma de Pasch podría no exigirse que la recta que corta uno de los lados del triángulo cortara un lado más, y *solamente* uno. Resulta que puede conservarse únicamente la exigencia de que la recta que corta uno de los lados del triángulo corte uno más, y lo de que este lado será *solamente* uno, puede demostrarse. Exactamente lo mismo, en el enunciado del axioma de Cantor puede no exigirse que el punto determinado por el sistema de segmentos encajados sea único. La singularidad de este punto también puede demostrarse. Sin embargo, todo esto complicaría y alargaría la exposición.

Resumamos lo dicho en este librito:

1) Hemos definido la geometría como la ciencia de las formas espaciales del mundo material.

2) Los conocimientos iniciales de las propiedades de las formas espaciales los obtuvimos por inducción, es decir, por medio de observaciones y experiencias reiteradas.

3) Las propiedades espaciales más profundas y generales de las cosas las enunciamos en forma de sistemas de proposiciones fundamentales o axiomas.

4) Un sistema de axiomas sólo refleja correctamente las propieda-

des espaciales realmente existentes si satisface las condiciones de ser completo, independiente y no contradictorio.

5) Excepto los axiomas, todas las proposiciones de la geometría — teoremas— se obtienen por deducción, es decir, deduciéndolos de los axiomas y de los teoremas demostrados anteriormente. Este sistema de deducciones se llama demostración.

6) Para que una demostración sea correcta, es decir, para que el teorema demostrado sea una verdad indudable, debe estar construida sobre razonamientos correctos y libre de errores. La correción de una demostración depende de: 1) la formulación exacta y correcta de la proposición que se demuestra, 2) la elección de los argumentos verdaderos necesarios, 3) la observación rigurosa de las reglas lógicas durante el desarrollo de la demostración.

Lecciones populares de matemáticas

En 1980 salen a la luz
los siguientes libros de la serie
"Lecciones populares de matemáticas":

Argunov B., Skorniakov L.
Teoremas de configuración

Beskin N.
División del segmento en la razón dada

Kostovski A.
Construcciones geométricas mediante un solo compás

Solodóvnikov A.
Sistemas de desigualdades lineales

Editorial MIR



Moscú